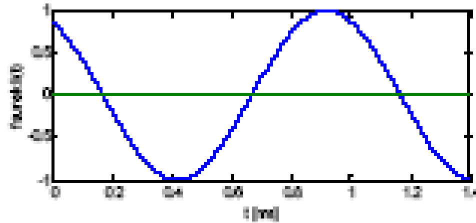
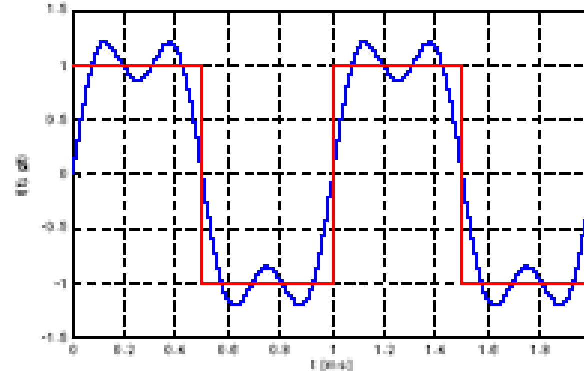
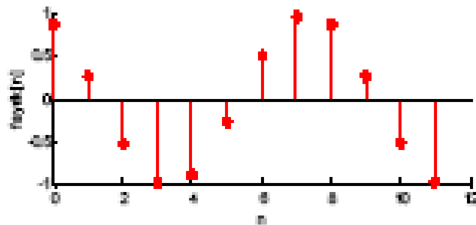
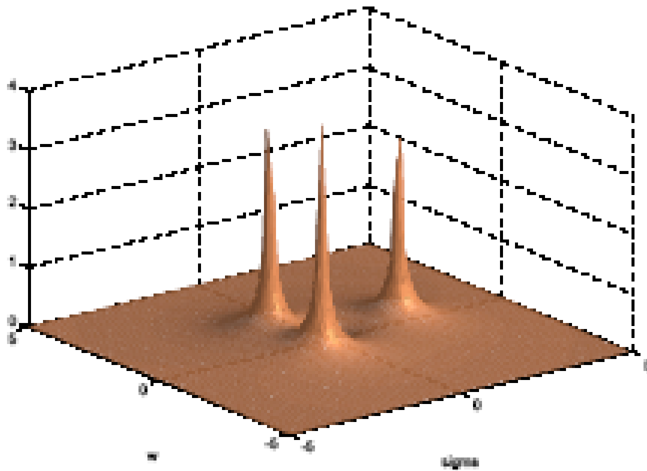
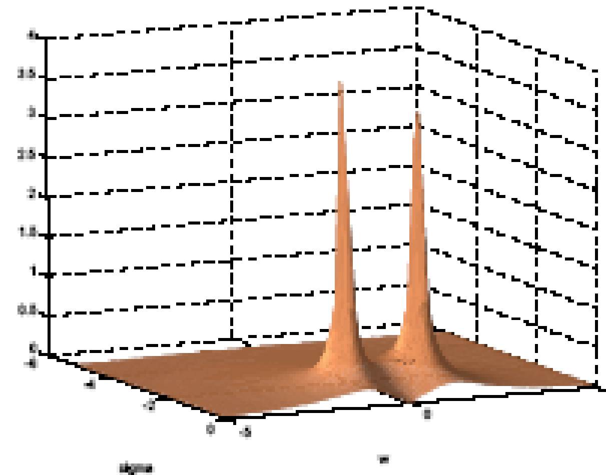
Sinyaller ve Sistemler

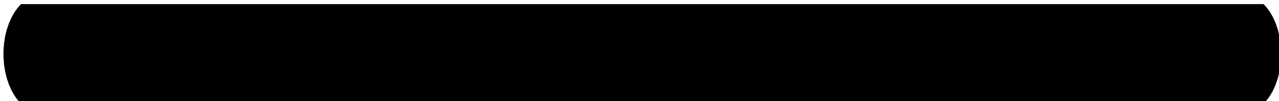












Sinyaller ve Sistemler

1. Sinyal Türleri ve Tanımlar
2. Doğrusal Zamanla Değişmeyen (DZD) Sürekli Sistemlerin Zaman Domeni Modelleri
3. DZD Sürekli Sistemlerin Frekans Domeni Modelleri
4. DZD Sürekli Sistemlerin s Domeni Modelleri
5. Ayrık Sistemler, Ayrık Fourier Dönüşümü, z Dönüşümü
6. Rastlantı Girişli DZD Sistemler

1. Sinyal Türleri ve Tanımlar

Sinyal (işaret): Bir fiziksel olayda mevcut olan bağımsız değişkenler ile bunların arasındaki ilişkinin matematiksel olarak biçimlendirilmiş şeklidir.

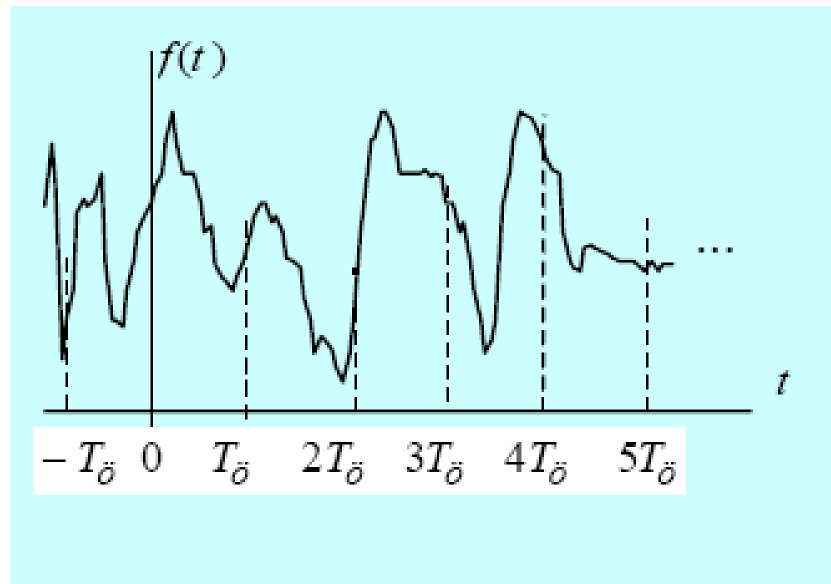
- Bir elektrik devresindeki bir elemanın uçlarındaki gerilim şiddetinin zamana göre değişimi
- Ses şiddetinin herhangi bir bağımsız değişken (veya değişkenlere) göre değişimi
- Sıcaklığın herhangi bir bağımsız değişken (veya değişkenlere) göre değişimi

Sinyal Türleri

- Sürekli (analog) sinyaller – ayrık sinyaller
- Periyodik (dönemli) sinyaller –
  periyodik olmayan (dönemsiz) sinyaller
- Enerji sinyalleri – güç sinyalleri
- Rastlantı sinyalleri- deterministik sinyaller

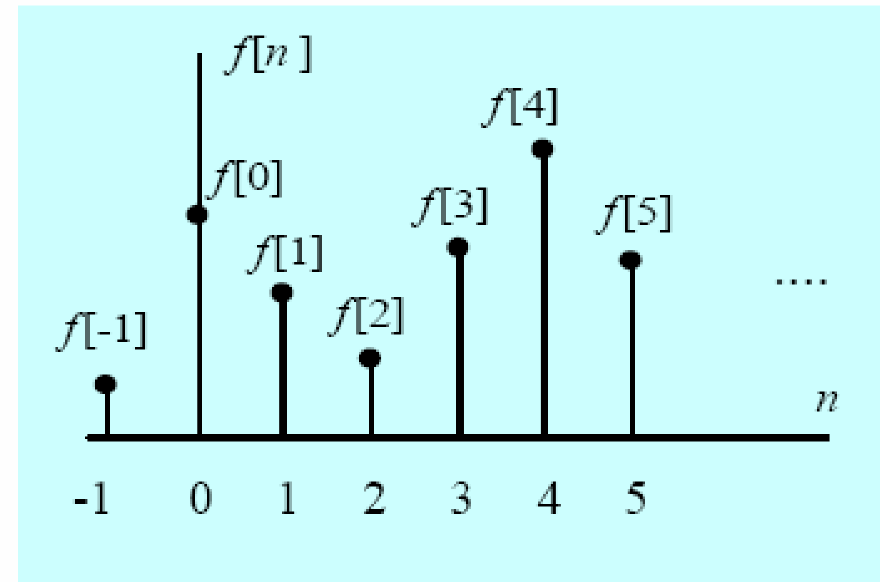
Sürekli Sinyaller (analog sinyaller) - Ayrık Sinyaller

Sürekli (zamanlı) sinyaller her t anı için tanımlıdırlar



$f(t)$, $g(t)$, $x(t)$ ve $y(t)$

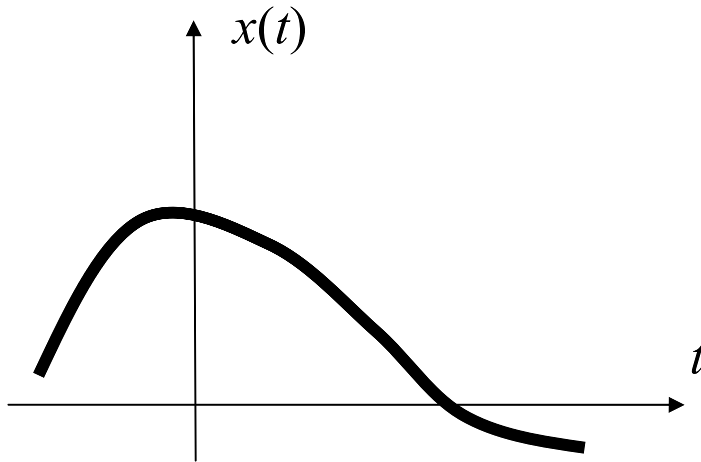
Ayrık (zamanlı) sinyaller belirli $t = nT_ö$ anlarında tanımlıdırlar



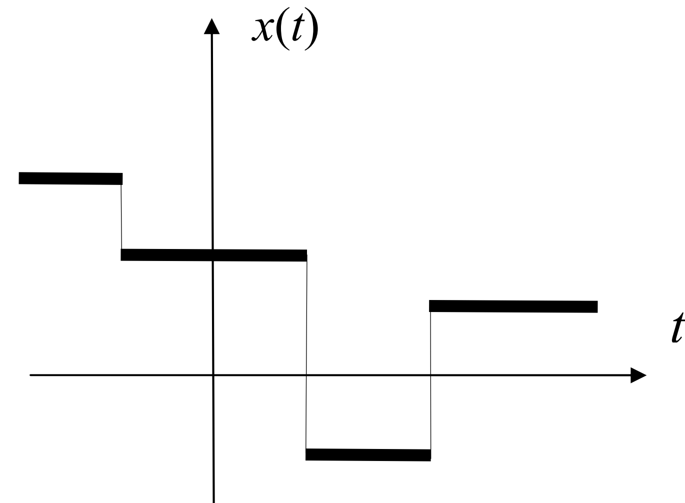
$f(nT_ö)$, $g(nT_ö)$, $x(nT_ö)$ ve $y(nT_ö)$

veya $f[n]$, $g[n]$, $x[n]$ ve $y[n]$

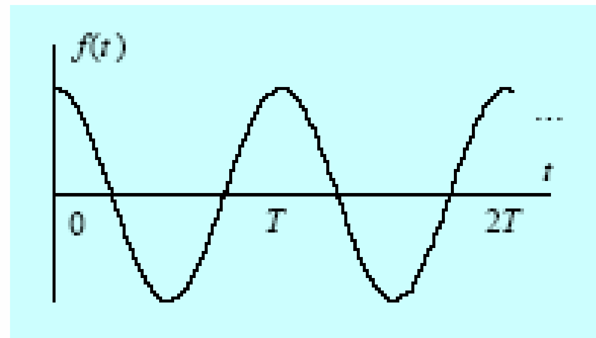
Sürekli genlikli sinyaller



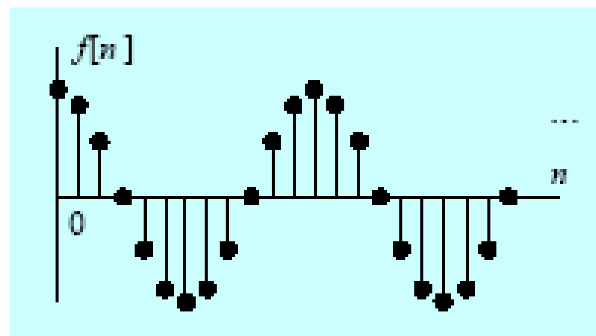
Ayrık genlikli sinyaller



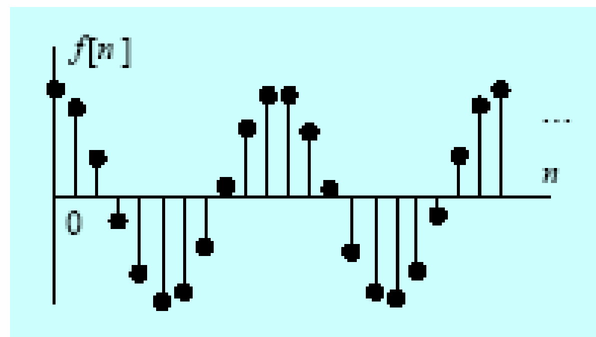
Periyodik Sinyaller - Periyodik Olmayan Sinyaller



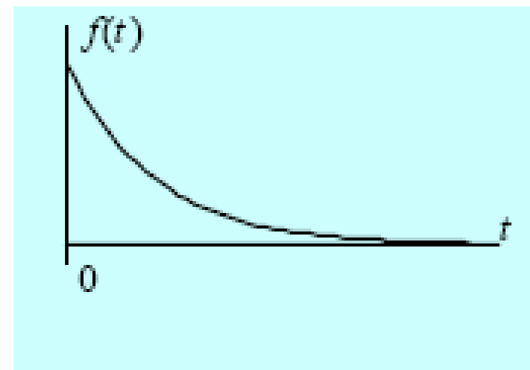
$$f(t) = f(t+T)$$

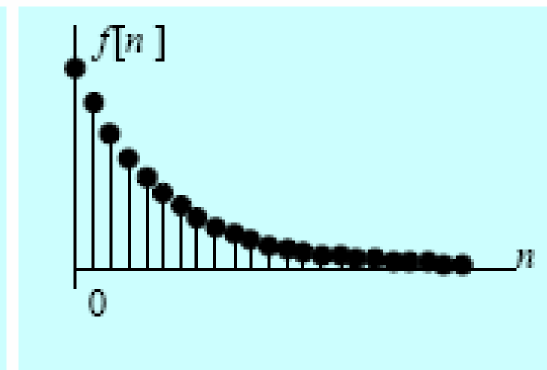


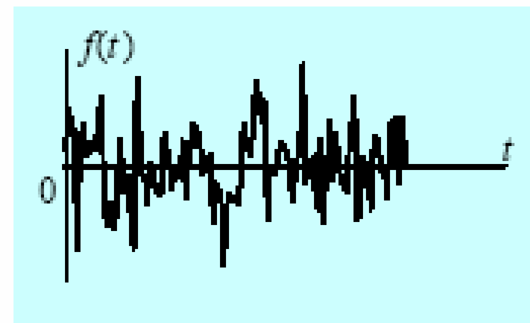
$$f[n] = f[n+N]$$

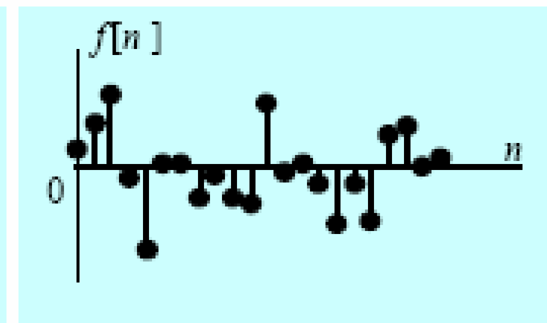


$$f[n] \neq f[n+N]$$









Periyodik davranış gösteren birçok sinyal, sistem testi ve incelemesi amacıyla sıkça kullanılırlar.

Örnek:

sinüzoidal sinyaller bir sistemin frekans tepkesinin belirlenmesinde,
dikdörtgen biçimli periyodik vuruş sinyalleri radarlarda,
testere dişi sinyaller ise osiloskoplarda tetikleme amacıyla kullanılır.

Pek çok biyolojik ve fiziksel sinyal periyodik olmayan bir yapıya sahiptir.
Örnek: Elektrokardiyografi (EKG) ve ses sinyalleri.

Yaklaşık Periyodik sinyaller: Bu tür sinyallerle bazı haberleşme sistemlerinin analizinde karşılaşılmaktadır.

Örnek: $f(t) = Sin(t) + Sin\sqrt{2}t$

Enerji Sinyalleri

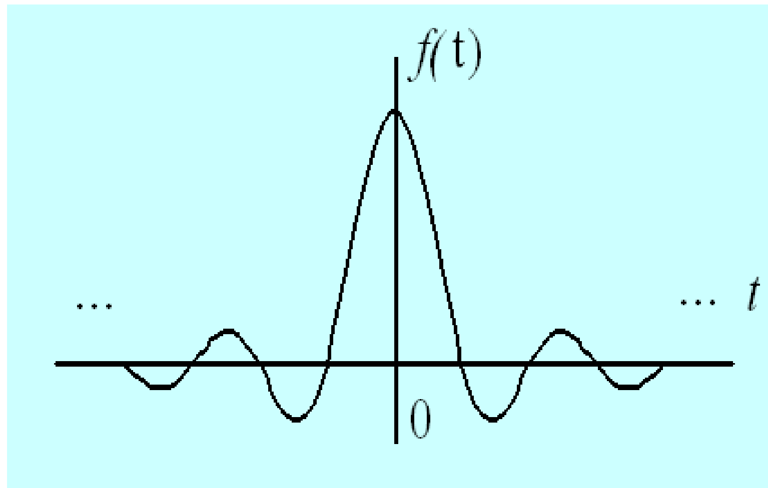
Sürekli

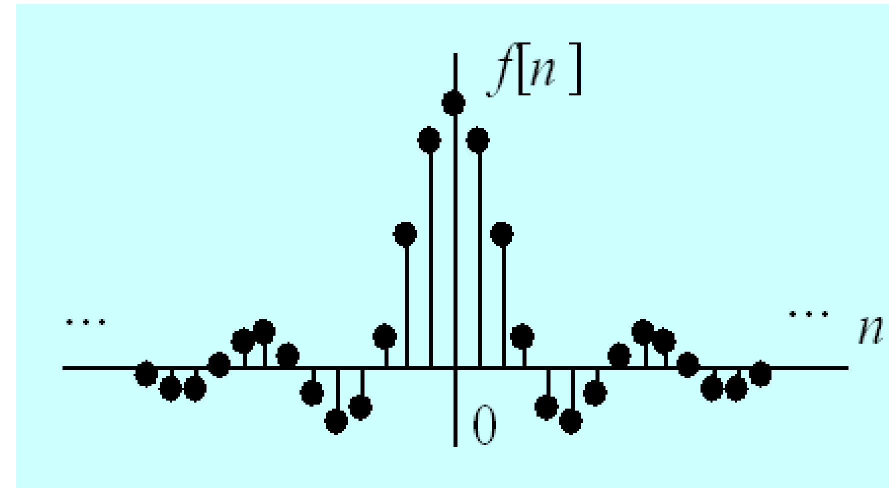
$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt$$

Ayrık

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f[n]|^2$$

$$E < \infty$$





Güç Sinyalleri

Sürekli

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 \, dt$$

Ayrık

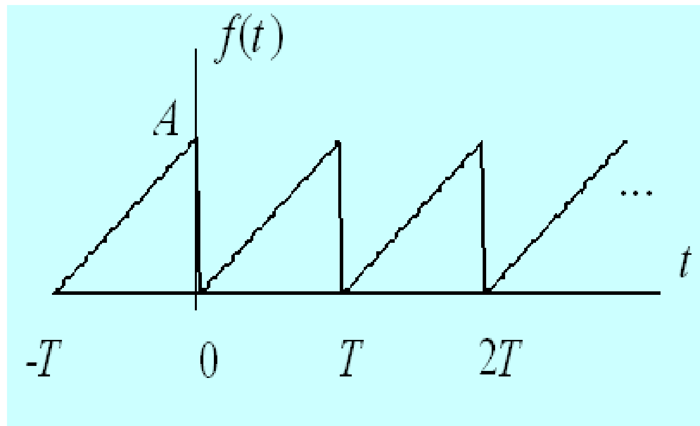
$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{N} |f[n]|^2$$

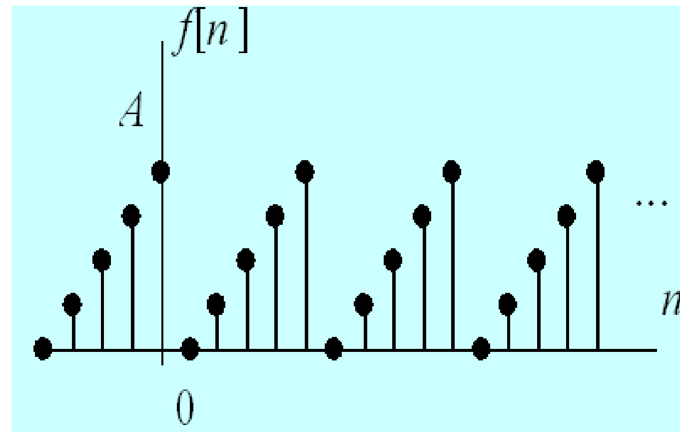
$$0 < P < \infty$$

Periyodik Güç Sinyalleri

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 \, dt$$

$$P = \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{N} |f[n]|^2$$

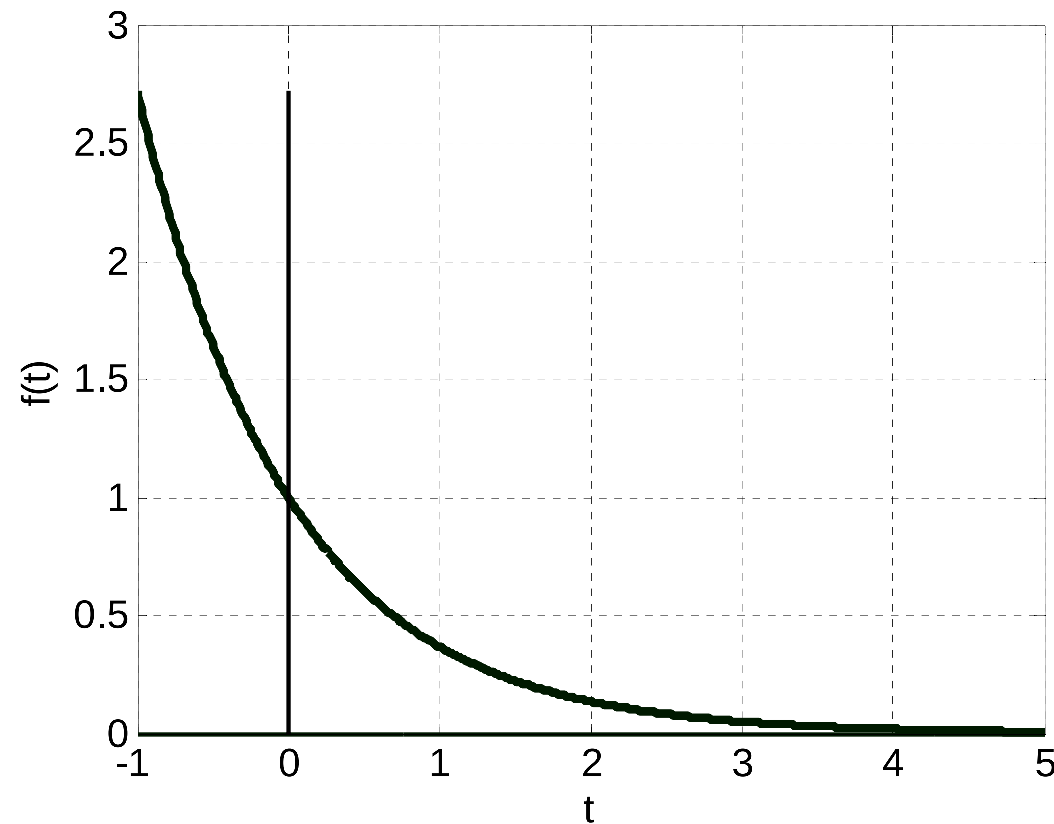




Bazı sinyaller ne güç sinyali ne de enerji sinyali sınıfına girerler. Bunların enerjileri ve ortalama güçleri sonsuz olabilir.

Örnek:

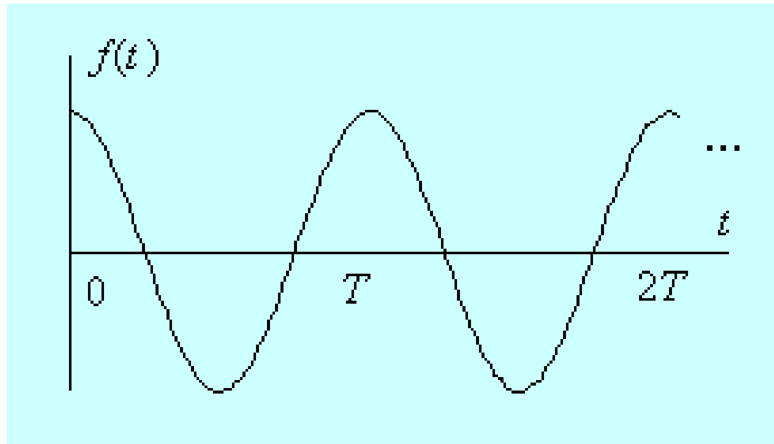
$$x(t) = e^{-t} \quad -\infty < t < \infty$$

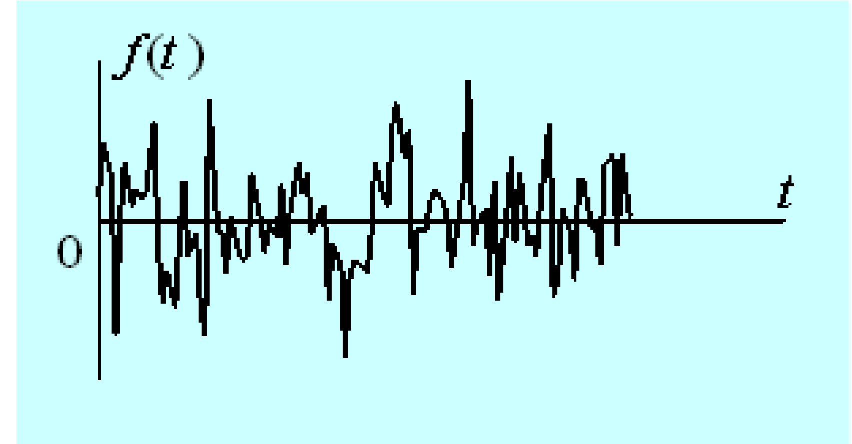


Deterministik Sinyaller - Rastlantı Sinyalleri

Deterministik sinyallerin şimdiki ve gelecekteki değerleri, geçmişteki değerlerinden yararlanarak hesaplanabilir. Bundan dolayı bu sinyaller kesin bir matematiksel formül ile ifade edilebilir.

Bazı fiziksel sinyallerin şimdiki ve gelecekteki değerleri geçmişteki değerlerinden hesaplanamaz ya da tahmin edilemez. Rastlantı sinyalleri için kesin bir matematiksel ifade yazmak mümkün değildir.





Rastlantı sinyalinin herhangi bir anda aldığı değer kesin olarak bilinmez. Ancak bu sinyalin herhangi bir anda alabileceği değerlerin olasılık dağılımı biliniyorsa bu sinyal, olasılık yoğunluk fonksiyonu ile tanımlanır:

$$P_f(x,t) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{olasilik\{x < f(t) < x + \Delta x\}}{\Delta x}$$

Eğer rastlantı sinyalinin istatistiksel özellikleri zamanla değişmiyorsa, olasılık yoğunluk fonksiyonu zamandan bağımsızdır.

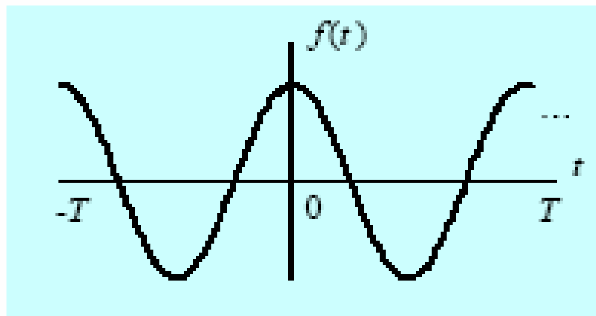
$$P_f(x,t) = P_f(x)$$

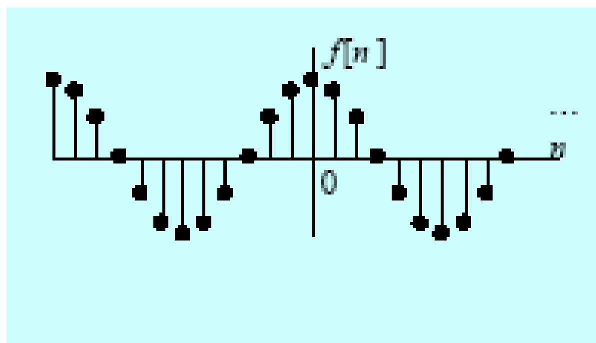
Sinyallerin Simetriklik Özellikleri

Çift sinyaller

$f(t) = f(-t)$

$f(t)$ sinyali $t=0$ dikey eksenine göre simetriktir

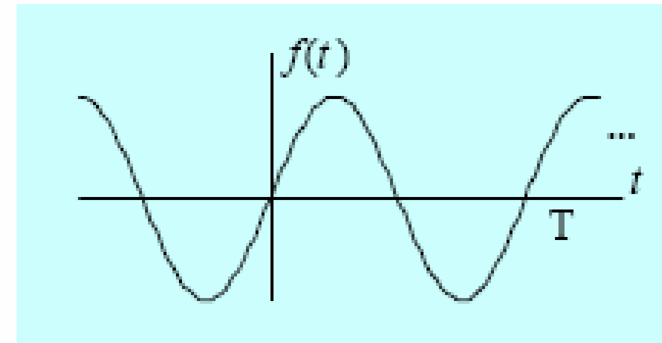


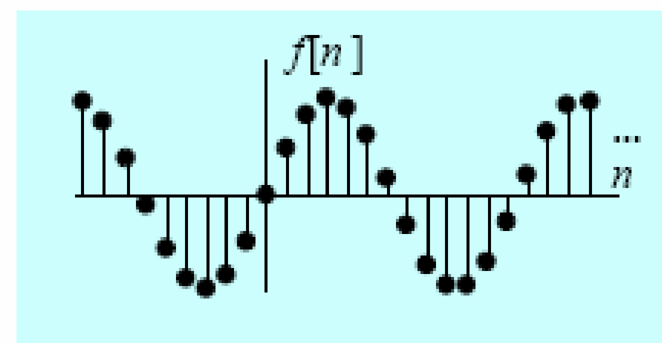


Tek sinyaller

$f(t) = -f(-t)$

$f(t)$ sinyali $t=0$ noktasına (orjine) göre simetriktir





$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$$ $f(t)$ çift fonksiyon

a pozitif bir sabit

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$$ $f(t)$ tek fonksiyon

(çift fonksiyon) x (çift fonksiyon)=çift fonksiyon
(çift fonksiyon) x (tek fonksiyon)=tek fonksiyon
(tek fonksiyon) x (tek fonksiyon)=çift fonksiyon

Bir Sinyalin tek ve çift bileşenlerinin elde edilmesi:

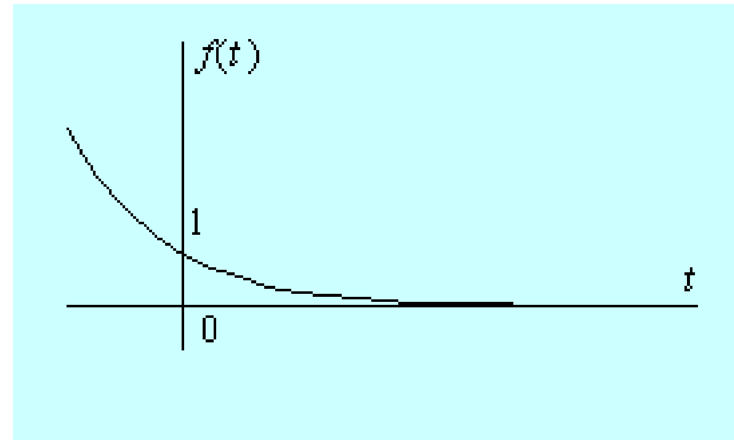
$$f(t) = f_e(t) + f_o(t)$$

$$f(-t) = f_e(t) - f_o(t)$$

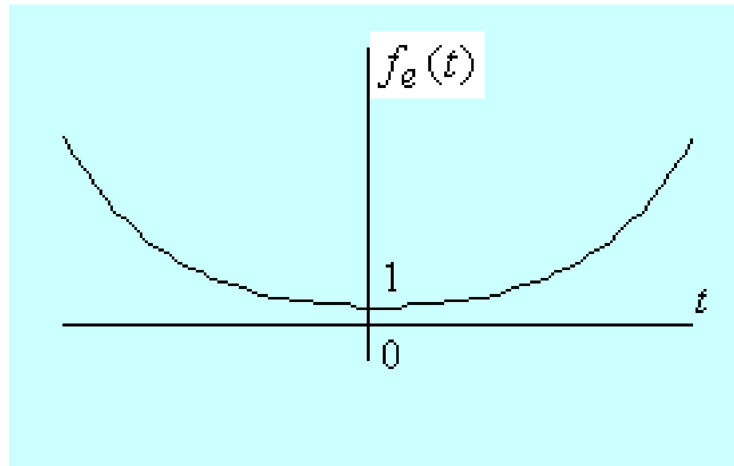
$$f_e(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2}$$

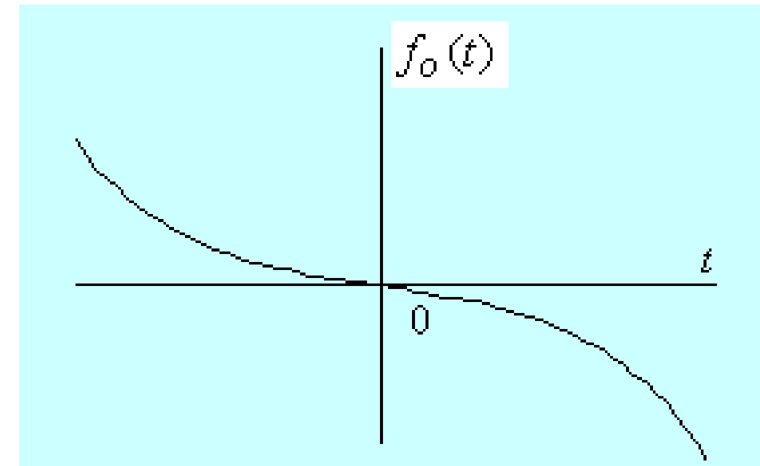
$$f_o(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$$

Örnek: $f(t) = e^{-t}, \quad -\infty < t < \infty$

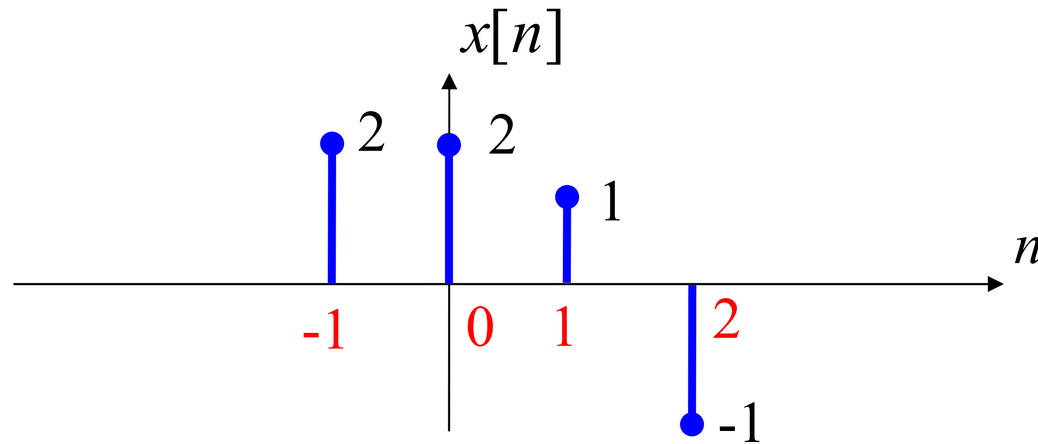


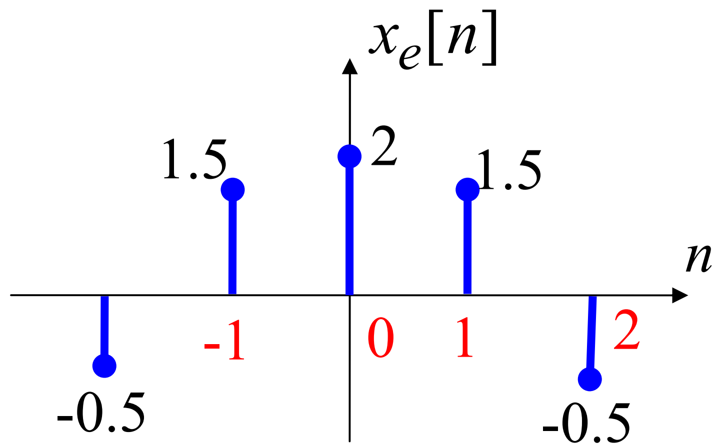
$$f_e(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} = \frac{e^{-t} + e^{t}}{2} \qquad f_o(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2} = \frac{e^{-t} - e^{t}}{2}$$

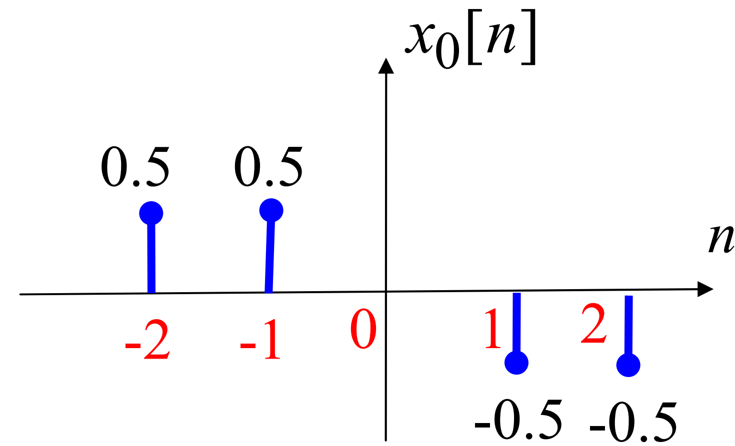




Örnek:







Singüler (Tekil) Fonksiyonlar

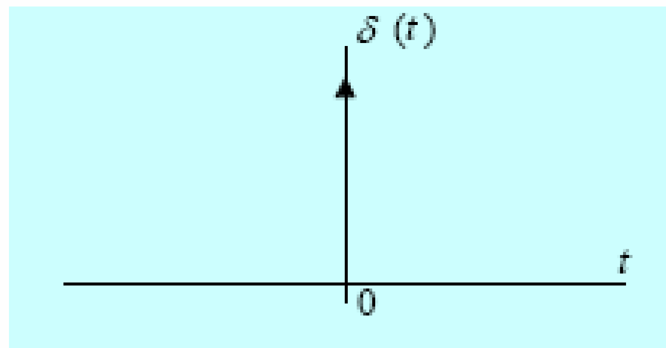
Bu fonksiyonların kendileri ya da türevleri sonlu bir değere sahip değildir.

Birim vuruş fonksiyonu $\delta(t)$ (dirac delta)

$f(t)$ fonksiyonu $t = t_0$ da sürekli bir fonksiyon, a ve b gerçel sayılar

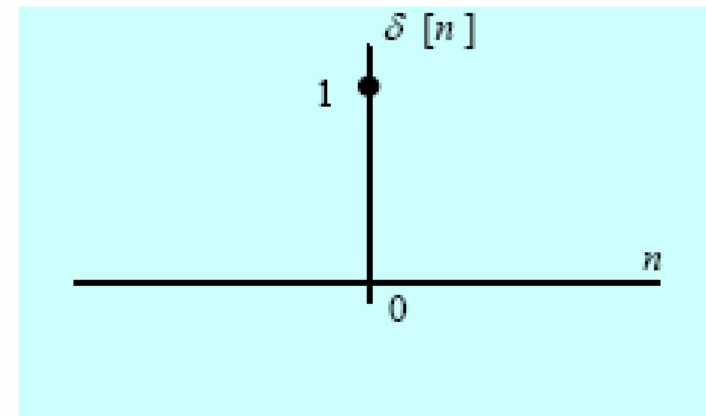
$$\int_a^b f(t)\delta(t-t_0)dt = \begin{cases} f(t_0), & a \le t_0 \le b \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$f(t_0) = 1 \text{ ise } \int_a^b \delta(t-t_0)dt = 1$$



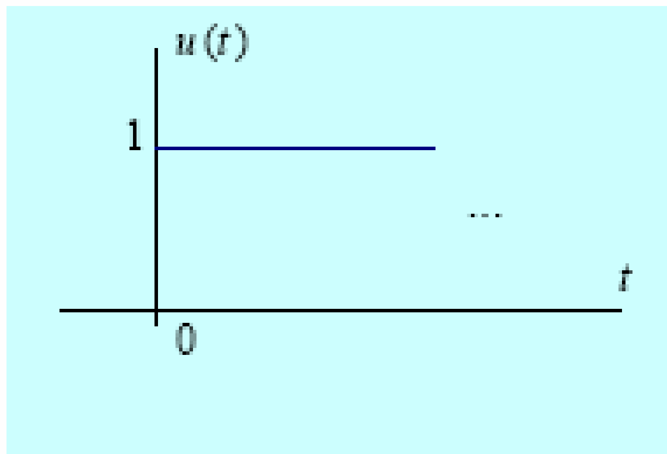
Birim örnek fonksiyonu $\delta[n]$

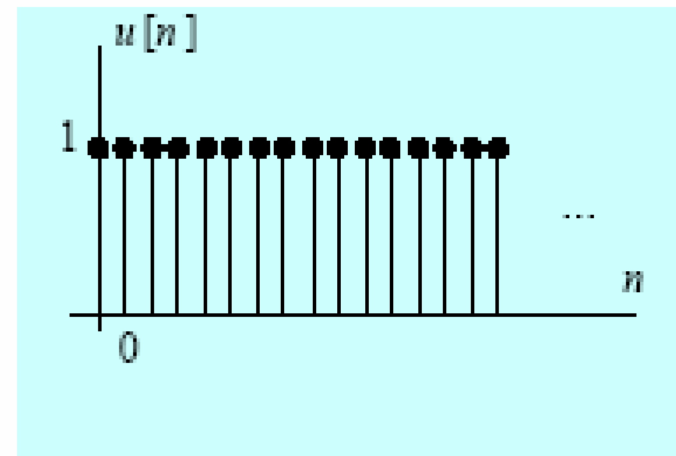
$$\sum_{n_a}^{n_b} f[n]\delta[n-n_0] = \begin{cases} f[n_0], & n_a \le n_0 \le n_b \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$



Birim basamak fonksiyonu

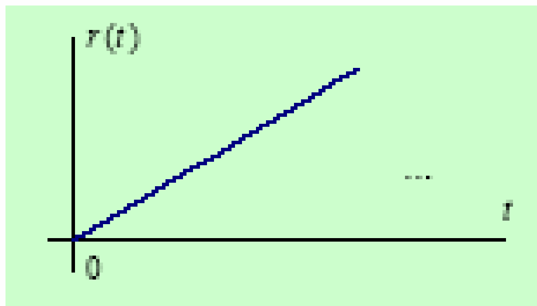
$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \text{ ise,} \\ 1, & t \geq 0 \text{ ise} \end{cases} \qquad u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \text{ ise,} \\ 1, & n \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

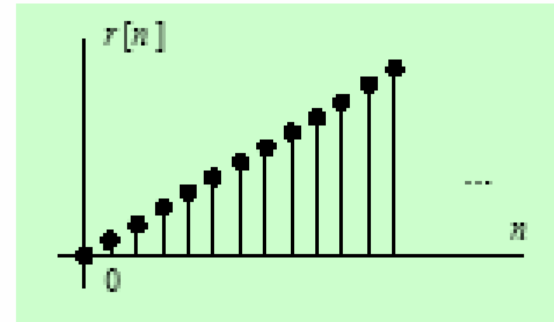




Birim Rampa Fonksiyonu

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \text{ ise}, \\ t, & t \geq 0 \text{ ise} \end{cases} \qquad r[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \text{ ise}, \\ n, & n \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

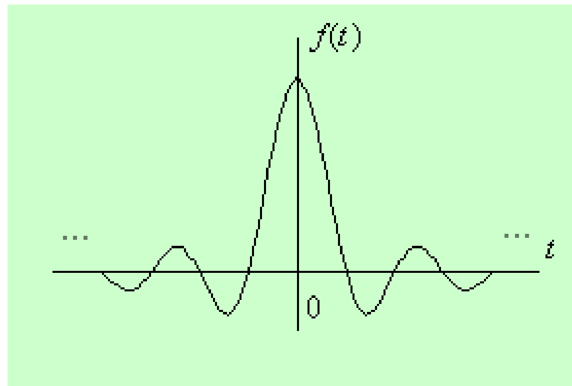


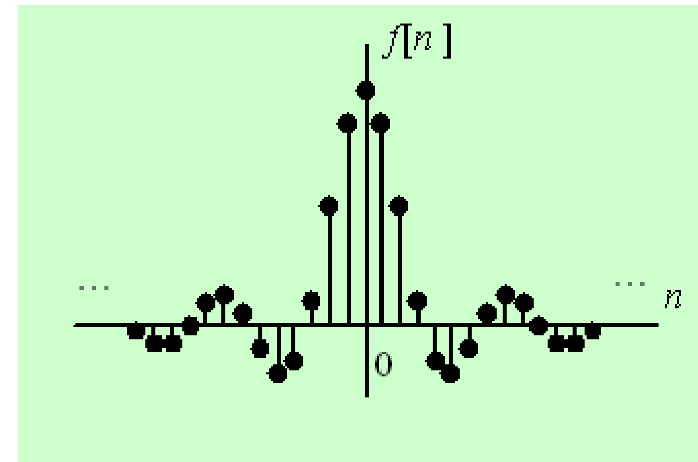


Sinc Fonksiyonu

$$Sincat = \frac{Sin\ a\pi\ t}{a\pi\ t}$$

$$Sincan = \frac{Sin\ a\pi\ n}{a\pi\ n}$$





$$t = k\frac{1}{a}, \quad k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$n = k\frac{1}{a}, \quad k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

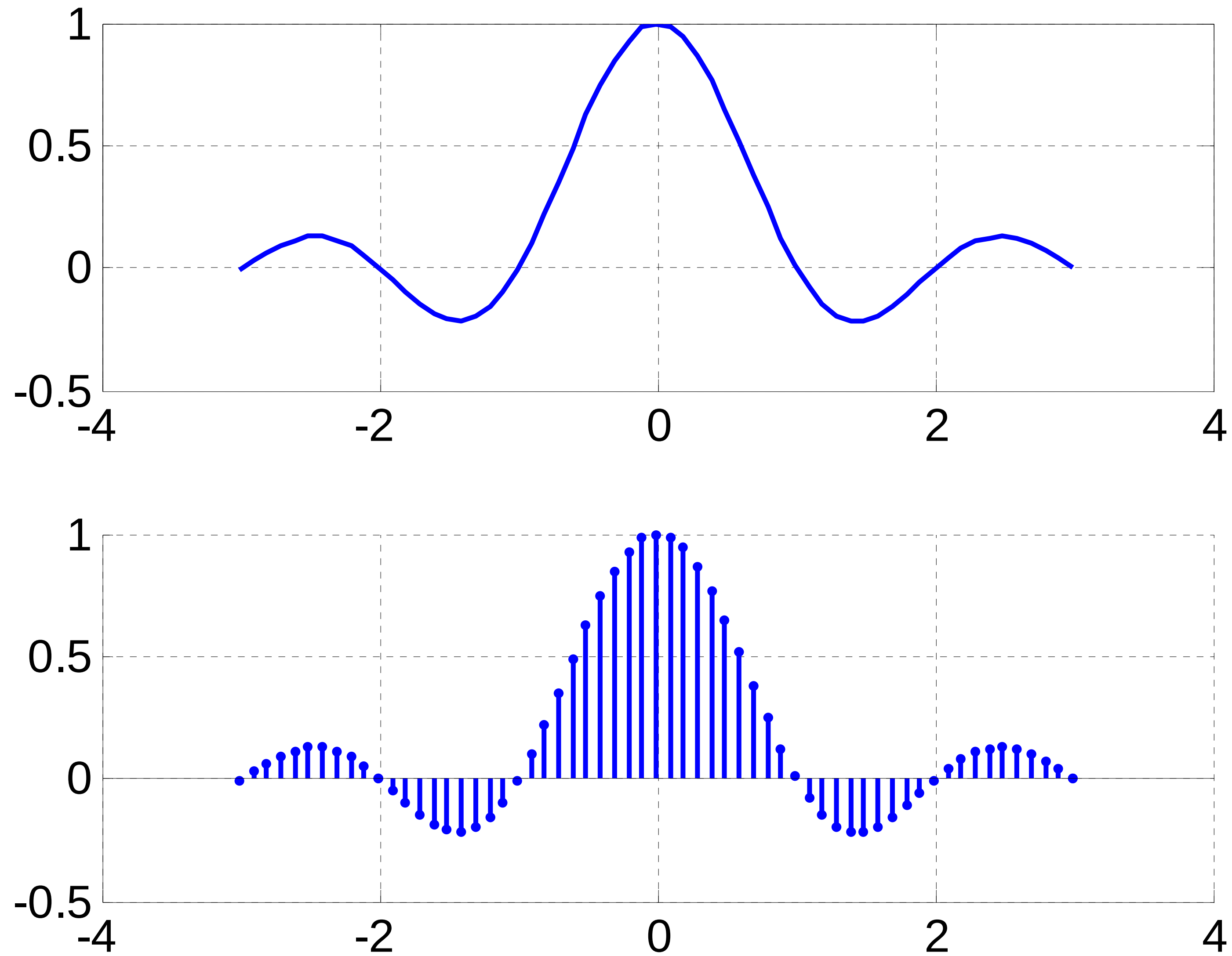
Örnek (MATLAB uygulaması):

Editor - C:\MATLAB7\work___sinyaller2010\sekil_1.m

File Edit Text Cell Tools Debug Desktop Window Help

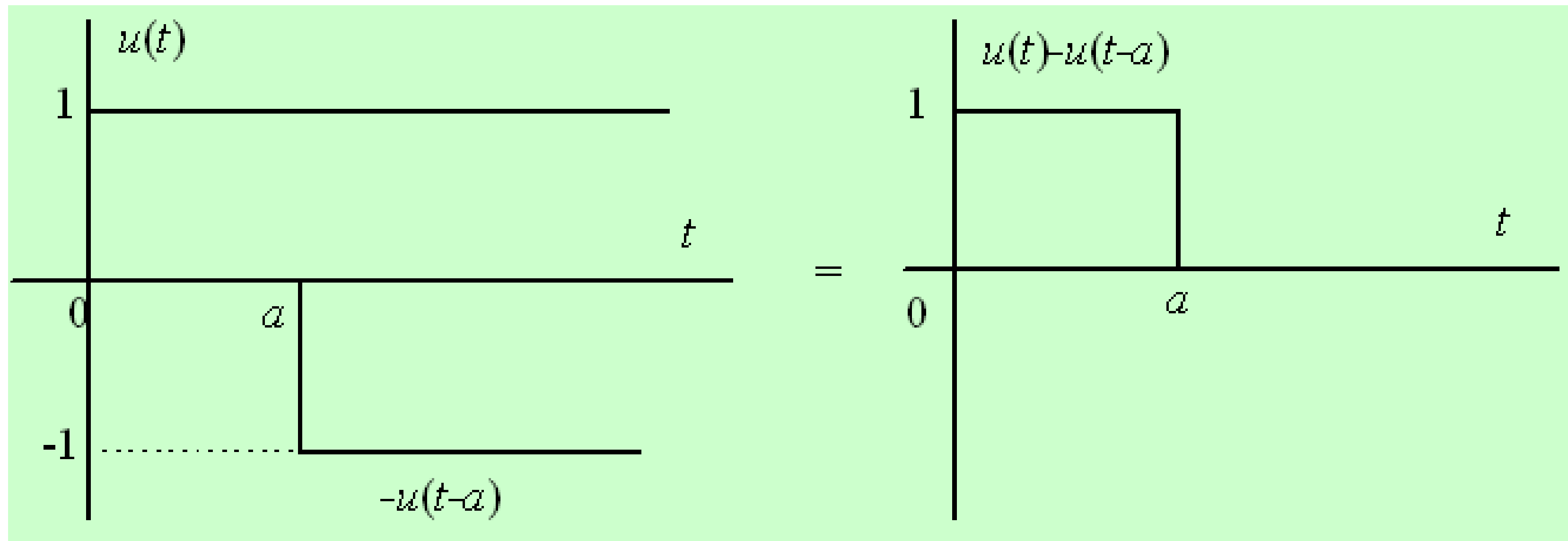
Stack

```
clear all;
t=-3.01:0.1:3;
f=sin(pi*t)./(pi*t);
subplot(2,1,1,'fontsize',14);
plot(t,f,'LineWidth',2,'Color',[0 0 1]);
grid
subplot(2,1,2,'fontsize',14);
stem(t,f,'linewidth',2,'marker','.','color',[0 0 1]);
grid
```

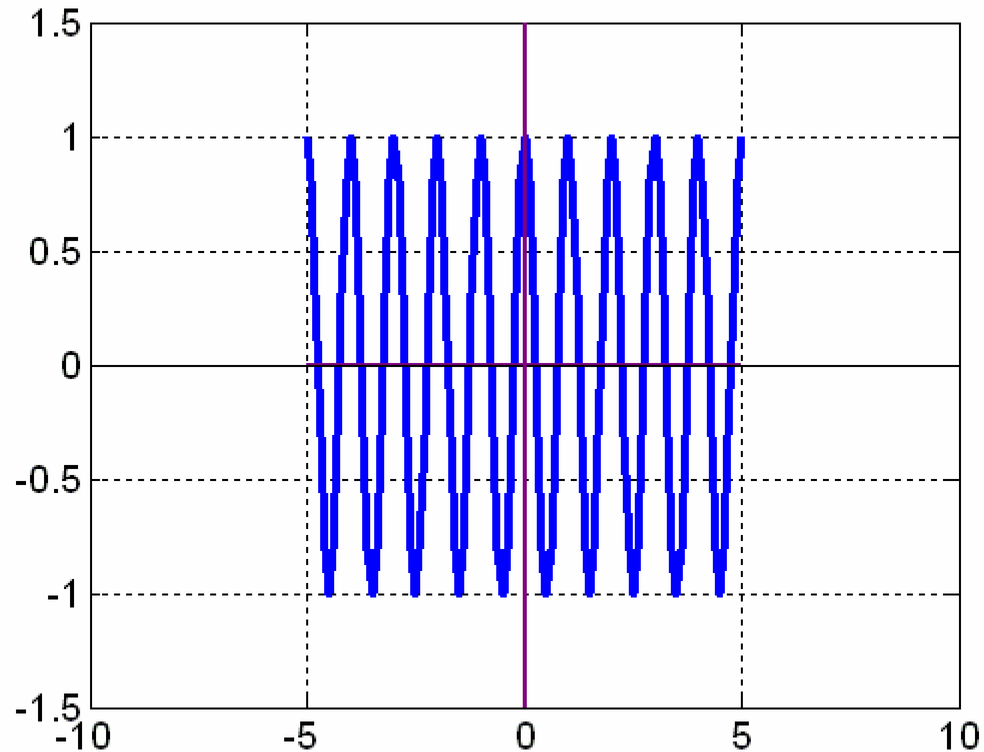

1
0.5
0
-0.5
-4
-2
0
2
4
1
0.5
0
-0.5
-4
-2
0
2
4

Sinyallerin Tekil Fonksiyonlarla Temsili

Dikdörtgen vuruş sinyali

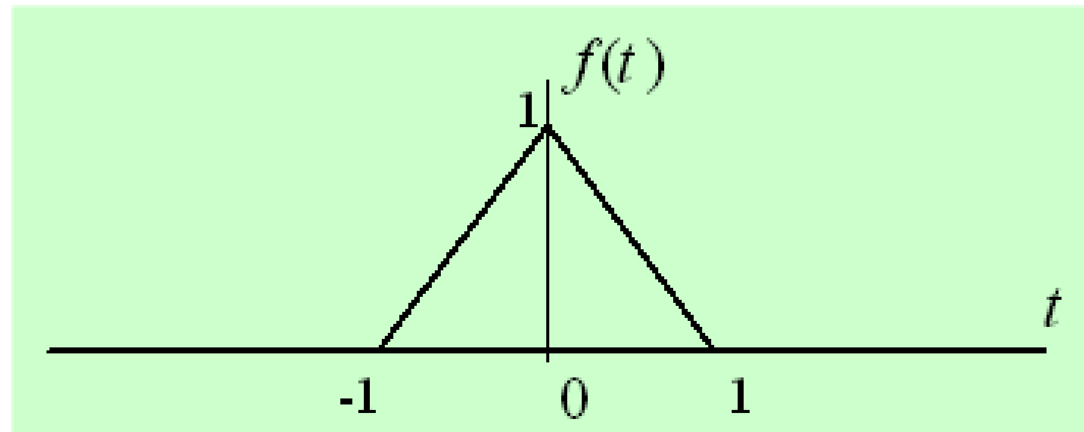


Yüksek Frekanslı Vuruş Sinyali



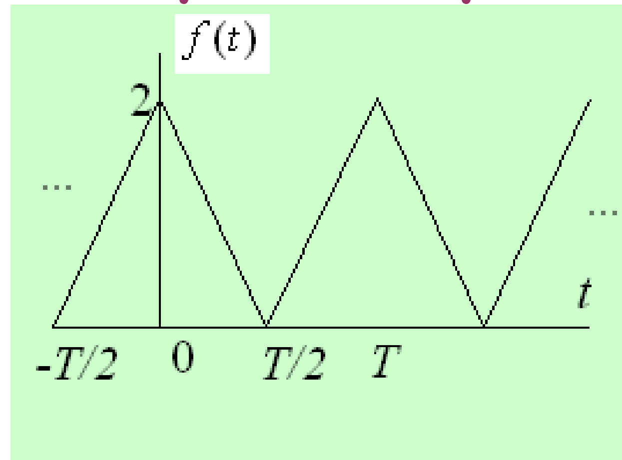
$$x(t) = \big(u(t+\tau) - u(t-\tau)\big)Cos\omega t$$

Üçgen Vuruş sinyali



$$f(t) = r(t+1) - 2r(t) + r(t-1)$$

Periyodik Sinyaller

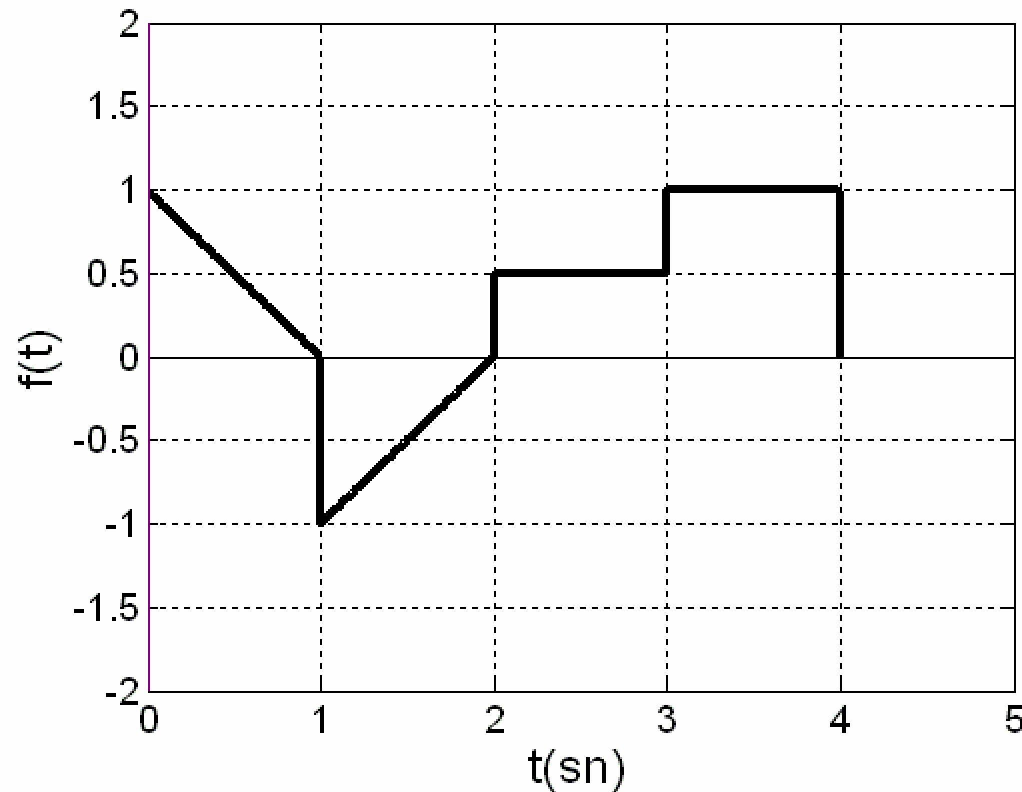


$$f(t) = \ldots + \frac{8}{T} r\left(t + \frac{T}{2}\right) - \frac{8}{T} r(t) + \frac{8}{T} r\left(t - \frac{T}{2}\right) - \frac{8}{T} r(t - T)$$

$$+ \frac{8}{T} r\left(t - \frac{3T}{2}\right) - \frac{8}{T} r(t - 2T) + \ldots$$

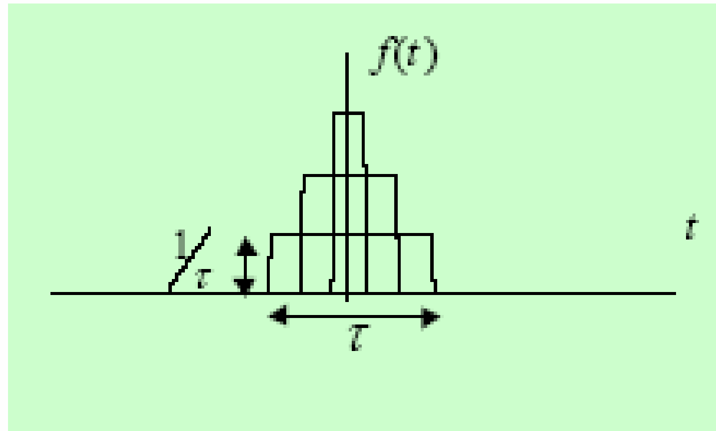
$$f(t) = \frac{8}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+1} r\left(t - k\frac{T}{2}\right)$$

Karışık Sinyaller

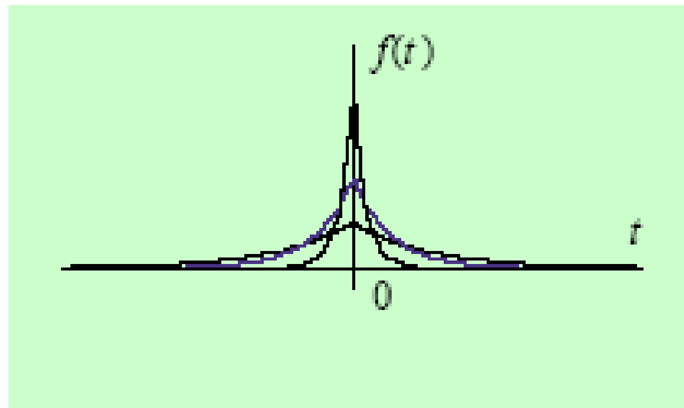


$$f(t) = -r(t) + u(t) + 2r(t-1) - u(t-1) - r(t-2) +$$
$$+ 0.5u(t-2) + 0.5u(t-3) - u(t-4)$$

Birim vuruş sinyalinin fiziksel fonksiyonlarla temsili



$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau}\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right) - u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$$

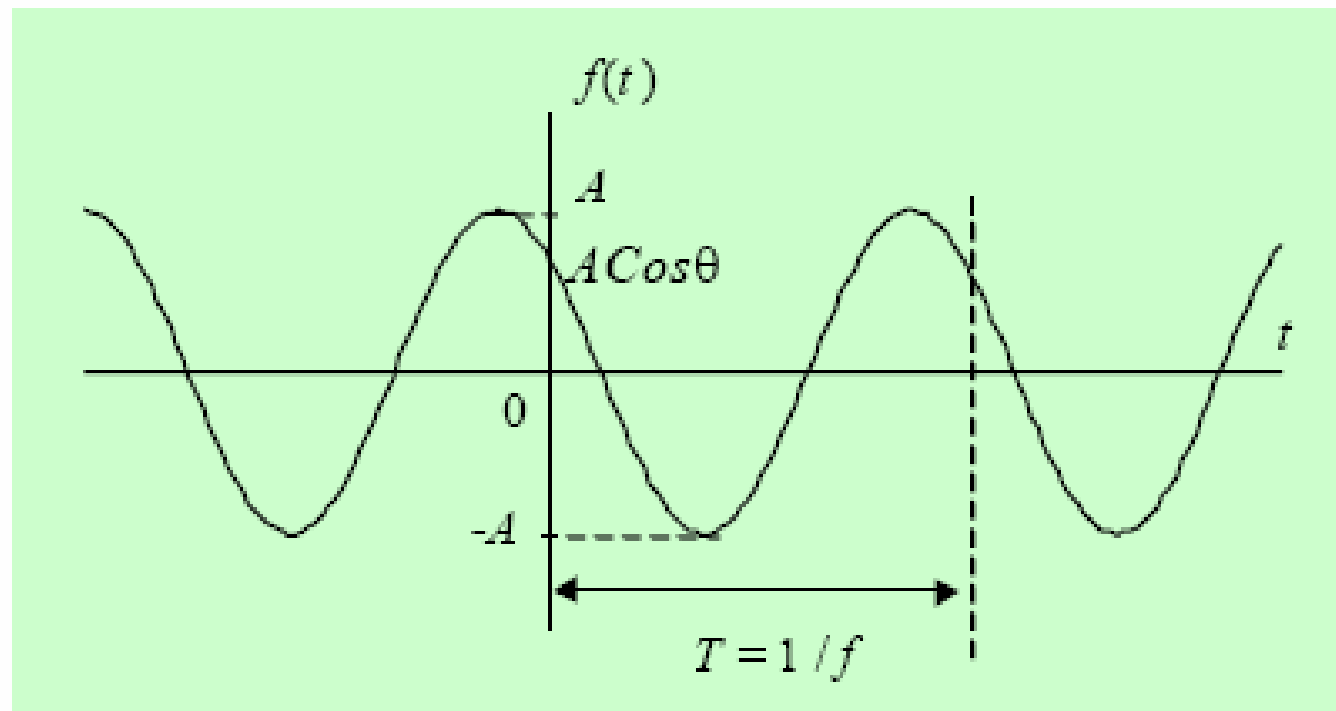


$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} e^{-|2t|/\tau}$$

Sürekli ve Ayrık Zamanlı Sinyallerde Frekans Kavramı

- Sürekli zamanlı sinüzoidal sinyaller

$$f(t) = ACos(\omega t + \theta) \qquad -\infty < t < \infty$$

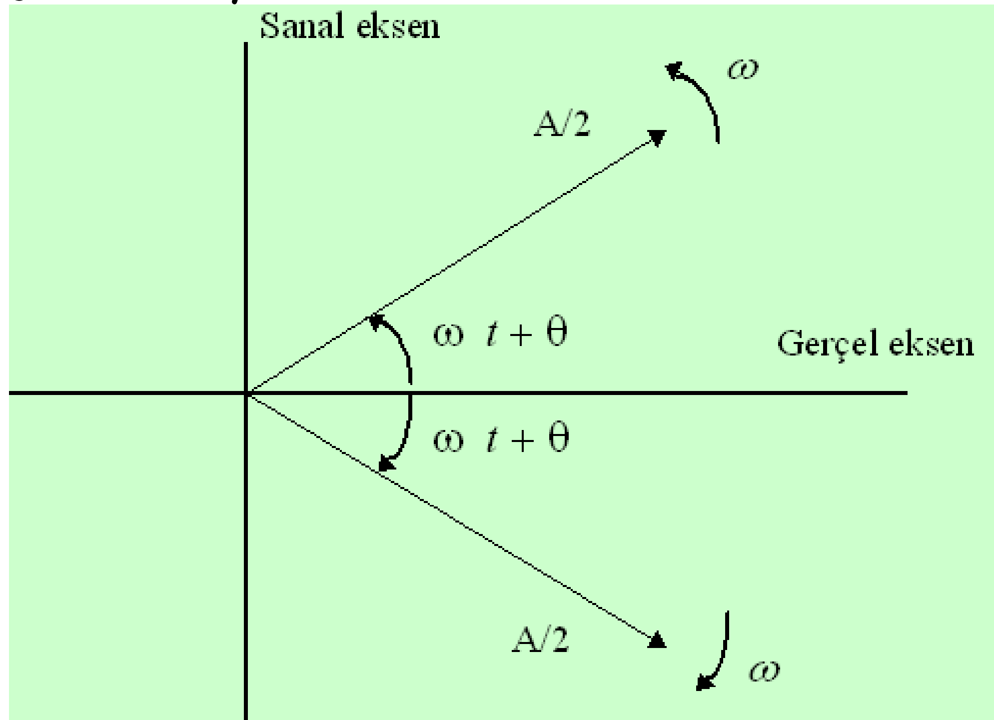


Euler eşitliği $e^{\pm j\phi} = \cos\phi \pm j\sin\phi$

kullanarak bir sinüzoidal sinyal

$$f(t) = A\cos(\omega t + \theta) = \frac{A}{2}e^{j(\omega t+\theta)} + \frac{A}{2}e^{-j(\omega t+\theta)}$$

şeklinde yazılabilir.



- **Ayrık zamanlı sinüzoidal sinyaller**

$$f(nT_ö) = A\cos(2\pi\, fT_ö n + \theta) = A\cos(\omega\, T_ö n + \theta) \qquad -\infty < n < \infty$$

$$\omega_s = \omega\, T_ö$$

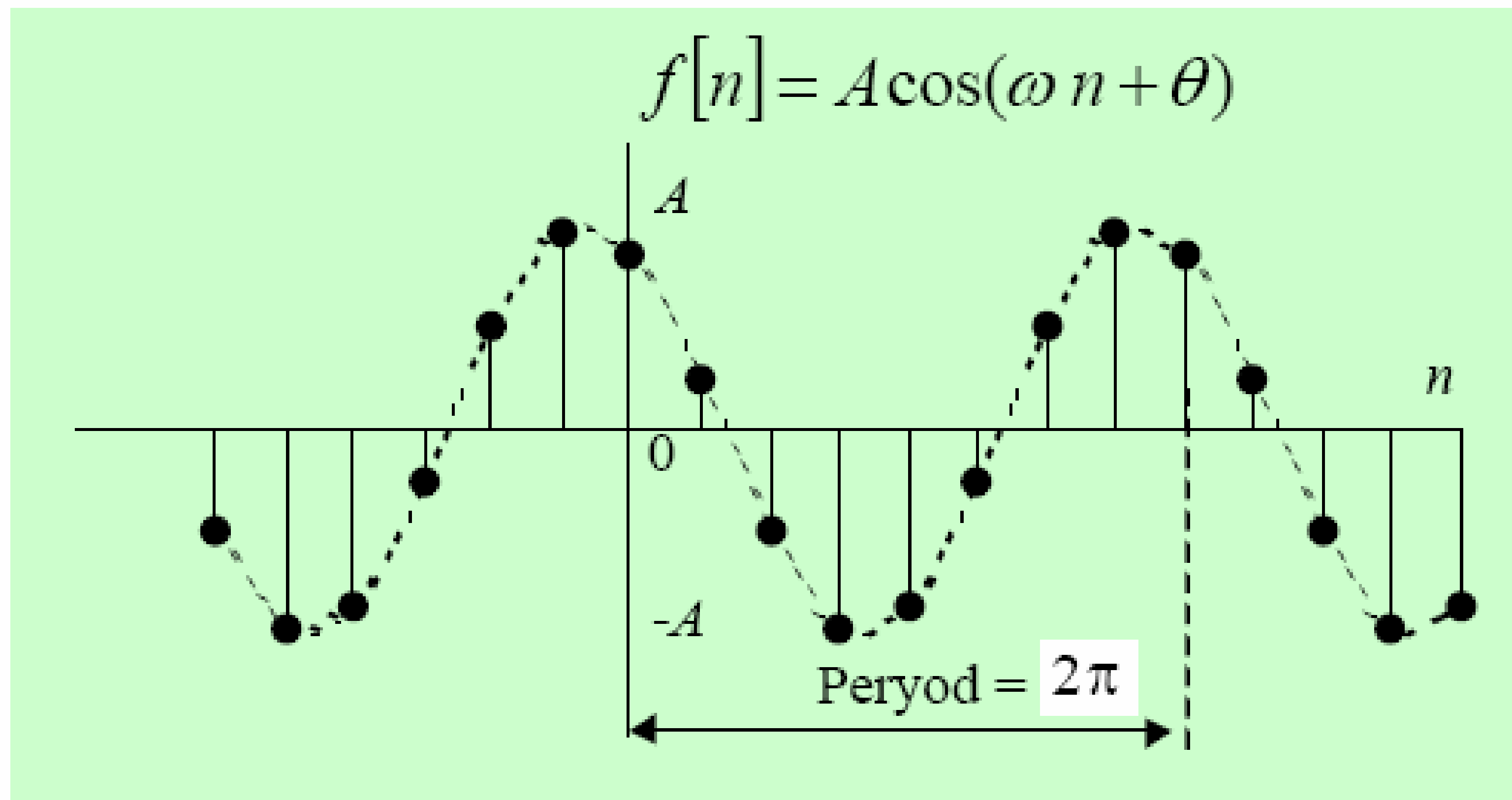
$$f[n] = A\cos(\omega_s n + \theta) \qquad -\infty < n < \infty$$

$$f_s = \frac{f}{f_ö}$$

$$f[n] = A\cos(\omega\, n + \theta) \qquad -\infty < n < \infty$$

$$\frac{2\pi}{T} T_ö = \frac{2\pi T_ö}{N T_ö} = \frac{[rad]}{[örnek]}$$

Örnek: $$f[n] = ACos\left(\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{6}\right)$$



MATLAB ÖRNEĞİ:

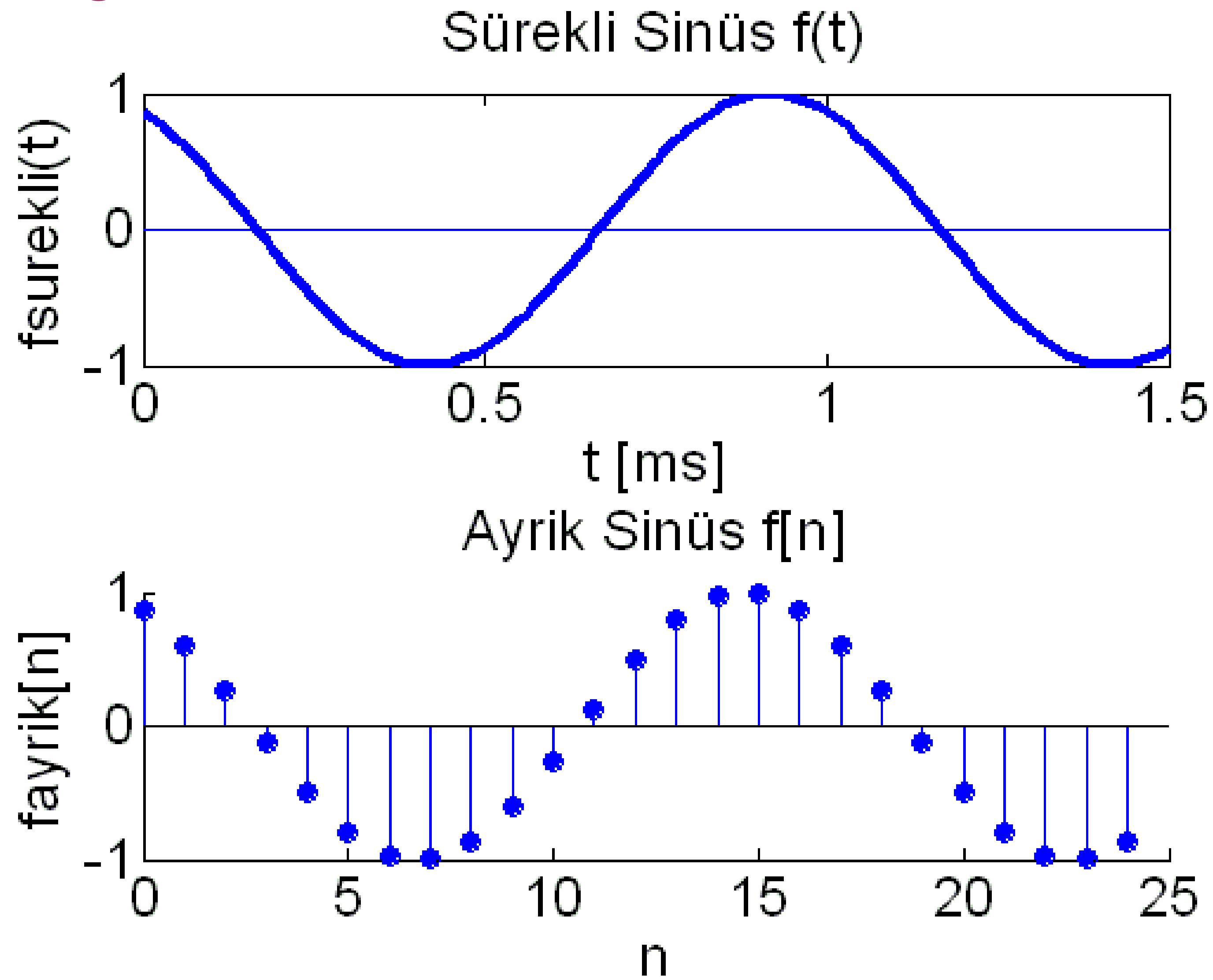
Editor - C:\MATLAB7\work____sinyaller2010\ornekleme0.m

File Edit Text Cell Tools Debug Desktop Window Help

Stack: Base

```
clear;  % Sürekli ve ayrik sinüs isaretinin cizimi
f0=1;   %frekans [Hz]
%disp('bir periyottaki örnek sayisini giriniz');input('os=');os=ans
os=16;
t=0:0.01:1.5;fs=cos(2*pi*f0*t+pi/6); e=0*t; %sürekli sinüs
subplot(2,1,1,'fontsize',18);
plot(t,fs,'Linewidth',3,'Color',[0 0 1]); hold on
plot(t,e,'Linewidth',1,'Color',[0 0 1]);
xlabel('t [ms]');
ylabel('fsurekli(t)');title('Sürekli Sinüs f(t)');
t2=0:(1/os):1.5;fa=cos(2*pi*f0*t2+pi/6);n=t2*os; %ayrik sinüs
subplot(2,1,2,'fontsize',18); stem(n,fa,'b','filled');xlabel('n');
ylabel('fayrik[n]');title('Ayrik Sinüs f[n]');
```

Program çıktısı



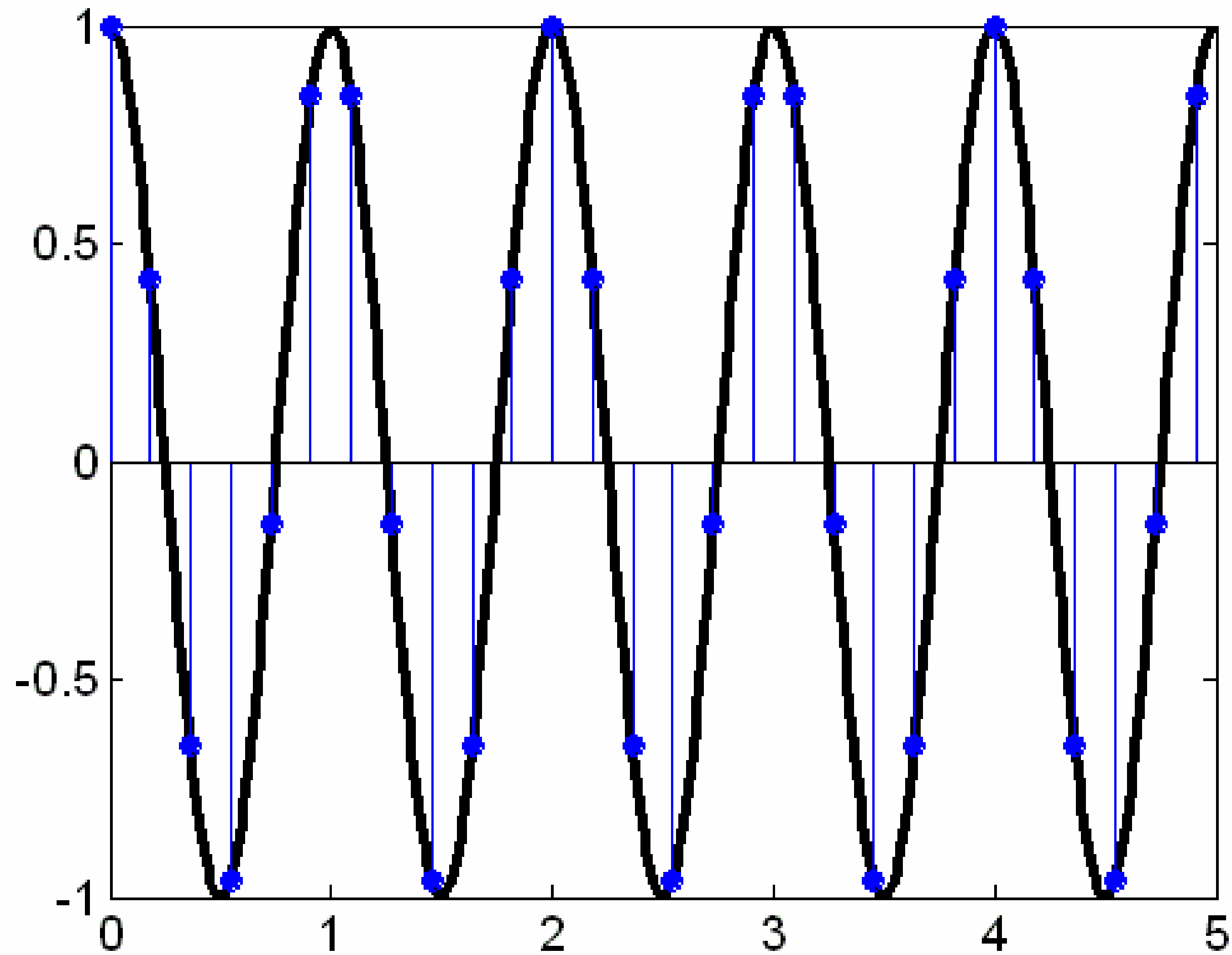
Shannon örnekleme kuramı: $f_{ö} \geq 2B$ Bir sinyalin örneklenmiş değerlerinden bozulmasız olarak yeniden elde edilebilmesi için bant genişliğinin en az iki katı hızında örneklenmesi gerekir. Yoksa örtüşme ortaya çıkar.

$f_{ö} \geq 2B$ frekansına Nyquist örnekleme frekansı da denir.

Sinüzoidal sinyallerde $B = \frac{1}{T} = f$ olduğu için sinüzoidal sinyallerin bant genişliği kendi frekanslarına eşittir.

Örnekleme için MATLAB örneği:

```
clear all;%Örnekleme yaparken bir periyotta tamsayı örnek
%alınması gerektiğini açıklayan program
w0=2*pi;
%w0=3*pi/4;
ustsinir=5;
t0=0:0.01:ustsinir;
x0=cos(w0*t0);
%t=0:0.1:ustsinir;%periyotta 10 örnek
t=0:0.18181818:ustsinir;%periyotta 5.5 örnek
%t=0:pi/15:ustsinir;%periyotta tamsayı olmayan örnek
x=cos(w0*t);
subplot(1,1,1,'fontsize',14);
plot(t0,x0,'LineWidth',3,'Color',[0 0 0]); hold on
stem(t,x,'b','filled');
axis
```


1
0.5
0
-0.5
-1
0
1
2
3
4
5

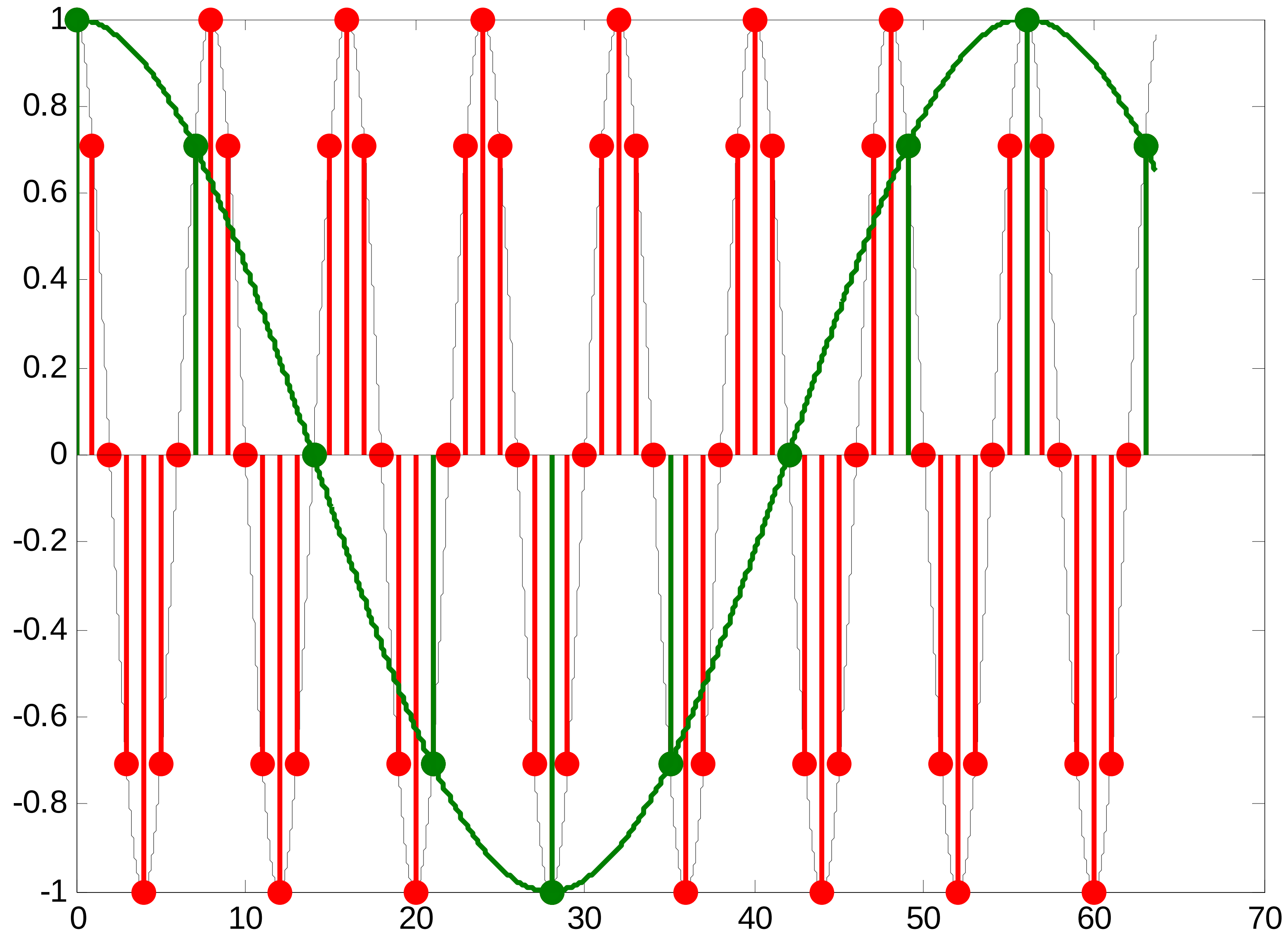
MATLAB Örneği:

Editor - C:\MATLAB7\work___sinyaller2010\ornekleme2.m

File Edit Text Cell Tools Debug Desktop Window Help

Stack: Base

```
clear;%örtüşme
w0=pi/4;ustsinir=50/w0;ortusme=7;
t0=0:0.01:ustsinir;
x0=cos(w0*t0);
t=0:1:ustsinir;
x=cos(w0*t);
t3=0:ortusme:ustsinir;
x3=cos(w0*t3);
plot(t0,x0,'LineWidth',1,'Color',[0 0 0]) ;hold on
stem(t,x,'filled','lineWidth',2,'color',[1 0 0]); hold on
plot(t3,x3,'o','LineWidth',2','color',[0 .5 0]); hold on
stem(t3,x3,'filled','lineWidth',2,'color',[0 0.5 0]); hold on
t4=0:0.001:ustsinir;
x4=cos(w0/ortusme*t4);
plot(t4,x4,'LineWidth',2,'Color',[0 .5 0])
```


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
10
20
30
40
50
60
70

Ayrık zamanlı periyodik sinüzoidal sinyallerin özellikleri:

- **Periyodik ve sürekli zamanlı bir sinyalin örneklenmesiyle oluşan ayrık zamanlı bir dizinin periyodik olabilmesi için (ve aynı zamanda sürekli ve ayrık sinyallerin periyotlarının eşit olabilmesi için)** $T_{\ddot{o}}$ **örnekleme aralığı olmak üzere,** $NT_{\ddot{o}}$ **nün sürekli zamanlı sinyalin periyodunun tam katı olması gerekir:**

$$NT_{\ddot{o}} = T$$

- Bir ayrık sinyalin periyodik olabilmesi için bütün n değerleri için $x[n] = x[n+N]$ eşitliğinin sağlanması gerekir. Örneğin, f frekanslı bir sinüzoidal sinyalin peryodik olması için,

  $\cos(\omega(N+n)+\theta) = \cos(\omega n+\theta)$ olmalıdır.

Bu eşitlik sadece ωN nin 2π nin tamsayı katı olduğunda sağlanır. Yani sinüzoidal sinyalin periyodikliği için k bir tamsayı olmak üzere $\omega N = 2\pi k$ veya $\frac{\omega}{2\pi} = \frac{k}{N}$ şartı gerekmektedir. N ve k birer tamsayı olduğundan $\cos \omega n$ sadece $\frac{\omega}{2\pi}$ nin rasyonel bir sayı olduğu durumlarda periyodik olmaktadır.

- **Yukardaki şartlar karmaşık üstel sinyaller için de geçerlidir.**

Periyodik karmaşık üstel sinyal için $e^{j\omega(n+N)} = e^{j\omega n}$ olmalıdır.

$x[n] = e^{j\omega n}$ sinyali için $\frac{2\pi}{\omega}$ tam sayı olursa $x[n]$ nin periyodu vardır ve $N = \frac{2\pi}{\omega}$ dir.

Eğer $\frac{2\pi}{\omega}$ rasyonel bir sayı ise periyot $N = k\frac{2\pi}{\omega}, \;\; k > 1$ olarak verilir.

Bu eşitliği sağlayan en küçük N değeri ***Temel Periyot*** olarak adlandırılır ($\omega \neq 0$ olmak koşuluyla N ve k hiçbir ortak çarpana sahip olmayacak, ortak çarpan varsa sadeleştirme yapılır yani ortak çarpana bölünürler).

Örnek:

$$x[n]=e^{j\left(\frac{\pi}{6}\right)n}, \qquad N=12,$$

$$x[n]=e^{j\left(\frac{8\pi}{31}\right)n}, \qquad N=31$$

$$x[n]=e^{j\left(\frac{1}{6}\right)n}$$ periyodik değildir.

$$x[n]=\cos\left(\frac{\pi}{11}n\right), \qquad N=22$$

$$x[n]=\cos(\tfrac{\pi}{4}n)+\cos(\tfrac{\pi}{5}n), \quad N=40$$

Örnek: $f(t) = 3Cos100\pi t$ sinyali veriliyor.

a)Örtüşmeye neden olmayacak minimum örnekleme frekansını bulunuz.

b) $f_{ö}$=200 Hz ise ayrık sinyali bulunuz.

c) $f_{ö}$=75 Hz ise ayrık sinyali bulunuz.

Çözüm:

a) $f_{ö}$=100 Hz.

b) $f_{ö}$=200 Hz ise $f[n] = 3Cos\frac{100\pi}{200}n = 3Cos\frac{\pi}{2}n$

c) $f[n] = 3Cos\frac{100\pi}{75}n = 3Cos\frac{4\pi}{3}n = 3Cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{3}\right)n = 3Cos\frac{2\pi}{3}n$

Sinyallerde Dikgenlik (ortogonallik) Şartı:

Herhangi bir karmaşık fonksiyon seti $\phi_k(t),\ k=0,\pm1,\pm2,...$ nin herhangi bir $-\infty \leq a < b \leq \infty$ aralığında dikgen set olması için bu setin

$$\int_a^b \phi_k(t)\phi_i^*(t)dt = E_k\delta(k-i) = \begin{cases} E_k, & k=i \\ 0, & k \neq i \end{cases}$$

şartını sağlanması gerekir.

$\delta(k-i)$ **Kronocker delta fonksiyonu** olarak dalandırılır ve şöyle tanımlanır:

$$\delta(k-i) = \begin{cases} 1, & k=i \\ 0, & k \neq i \end{cases}$$

E_k ilgili aralıkta $\phi_k(t)$ sinyalinin enerjisi olup, yukardaki tanıma göre

$$E_k = \int_a^b |\phi_k(t)|^2 dt$$

şeklinde hesaplanır.

Dikgenlik şartını sağlayan sinyaller aynı zamanda ilgili aralıkta birim enerjiye sahipseler bu sinyaller aynı zamanda **normalize dikgen**dirler (ortonormal).

Normalize dikgen olmayan bir set $\phi_k(t)$ sinyallerinin $\sqrt{E_k}$ ye bölünmesiyle normalize edilir.

Herhangi bir karmaşık ayrık fonksiyon setinin $\phi_k[n], \quad k = 0,\pm1,\pm2,...$ herhangi bir $-\infty \le n_a < n_b \le \infty$ aralığında dikgen set olabilmesi için bu setin

$$\sum_{n_a}^{n_b} \phi_k[n]\phi_i^*[n] = E_k\delta[k-i] = \begin{cases} E_k, & k = i \\ 0, & k \ne i \end{cases}$$

şartını sağlaması gerekir.

Enerji: $E_k = \sum_{n_a}^{n_b} \left|\phi_k[n]\right|^2$

Örnek: $\phi_k(t) = \sin kt,\ k = 1,2,3,...$ sinyal setinin $-\pi < t < \pi$ aralığında dikgen olup olmadığı araştırılsın:

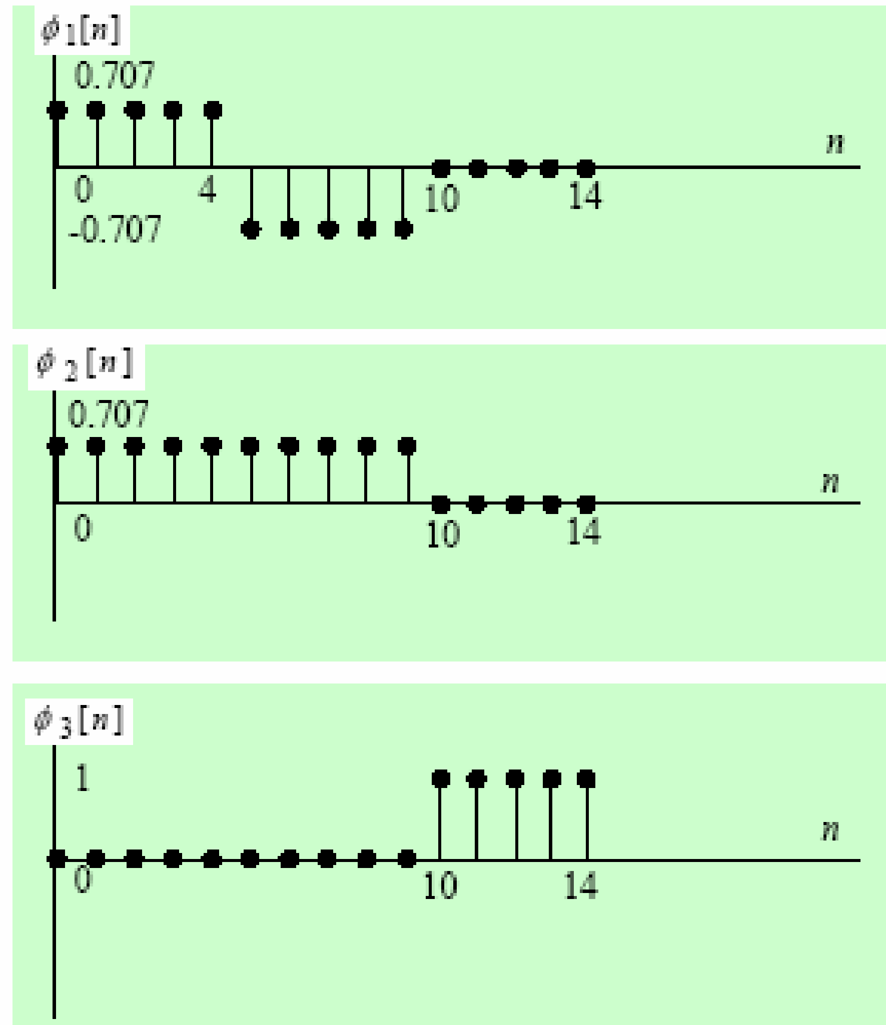
$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_k(t)\phi_i^*(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin kt)(\sin it)dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k-i)t\ dt - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k+i)t\ dt$$

$$= \begin{cases} \pi, & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases}$$

Örnek: $\phi_k(t) = e^{j(2\pi kt)/T}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ sinyal setinin $0 \le t \le T$ aralığında dikgen olup olmadığı araştırılsın:

$$\int_0^T \phi_k(t)\phi_i^*(t)dt = \int_0^T e^{\left(\frac{j(2\pi k\,t)}{T}\right)} e^{\left(\frac{-j(2\pi i\,t)}{T}\right)} dt = \begin{cases} T, & k = i \\ 0, & k \ne i \end{cases}$$

Örnek:



$0 \leq n \leq 14$ aralığında dikgen olup olmadıklarını araştırınız

Sinyallerin Dikgen Fonksiyonlarla Temsili

$\phi_k(t)$, $a < t < b$ aralığında dikgen bir sinyal seti olsun.

$f(t)$ bu aralıkta sonlu enerjili bir sinyal olsun. $f(t)$ sinyali bu dikgen set cinsinden yakınsak bir seriyle gösterilebilir:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \phi_k(t)$$

, F_k katsayıları yukarıdaki ifadenin her iki tarafının $\phi_k^*(t)$ ile çarpıldıktan sonra ilgili aralıkta integrallerinin alınmasıyla aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$F_k = \frac{1}{E_k} \int_a^b f(t)\phi_k^*(t)dt = \frac{\int_a^b f(t)\phi_k^*(t)dt}{\int_a^b |\phi_k(t)|^2 dt}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ..$$

Ayrık sinyaller için yukardaki ifadelerin karşılığı:

$$f[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k)\phi_k[n]$$

$$F(k) = \frac{1}{E_k}\sum_{n_a}^{n_b} f[n]\phi_k^*[n] = \frac{\sum_{n_a}^{n_b} f[n]\phi_k^*[n]}{\sum_{n_a}^{n_b} \left|\phi_k[n]\right|^2}, \qquad k = 0,\pm 1,\pm 2,..$$

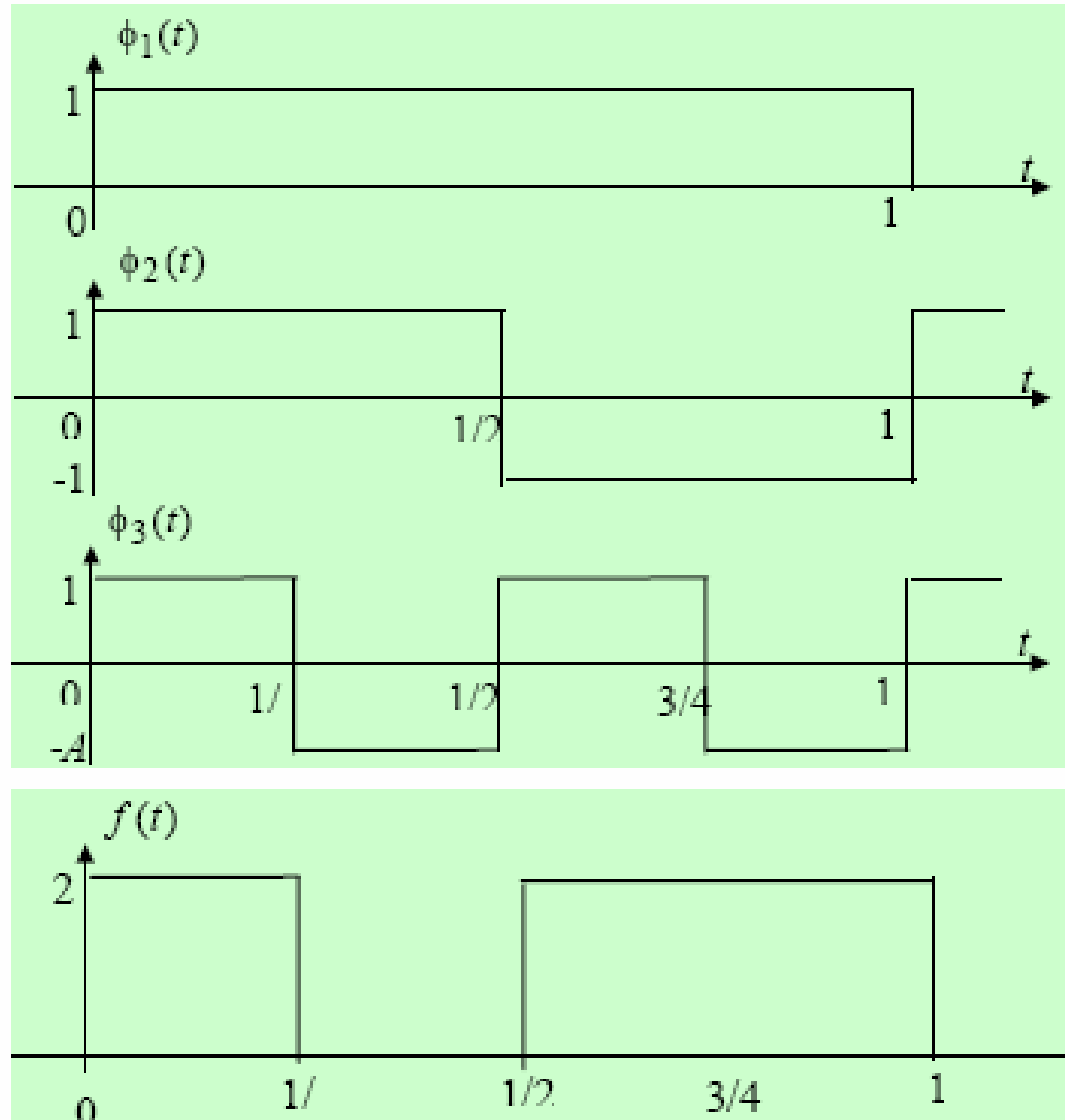
Örnek:

a) Yanda grafikleri verilen fonksiyonların $0 < t < 1$ aralığında dikgen bir set oluşturduğunu gösteriniz.

b) Aşağıda grafiği verilen $f(t)$ sinyalini bu dikgen set cinsinden yazınız.

c) Hata fonksiyonunu çiziniz.

d) Hatanın enerjisini hesaplayınız.



Çözüm a)

$$\int_0^1 \phi_1(t)\phi_2(t)dt = 0 \quad , \quad \int_0^1 \phi_1(t)\phi_3(t)dt = 0, \quad \int_0^1 \phi_2(t)\phi_3(t)dt = 0$$

(Dikgendirler)

$$\int_0^1 \phi_1(t)\phi_1(t)dt = 1 \; , \; \int_0^1 \phi_2(t)\phi_2(t)dt = 1 \; , \; \int_0^1 \phi_3(t)\phi_3(t)dt = 1$$

(normalize dikgendirler)

Sonuç: $$\int_0^1 \phi_k(t)\phi_i^*(t)dt = \begin{cases} 1, & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases}$$

olduğundan normalize dikgendirler.

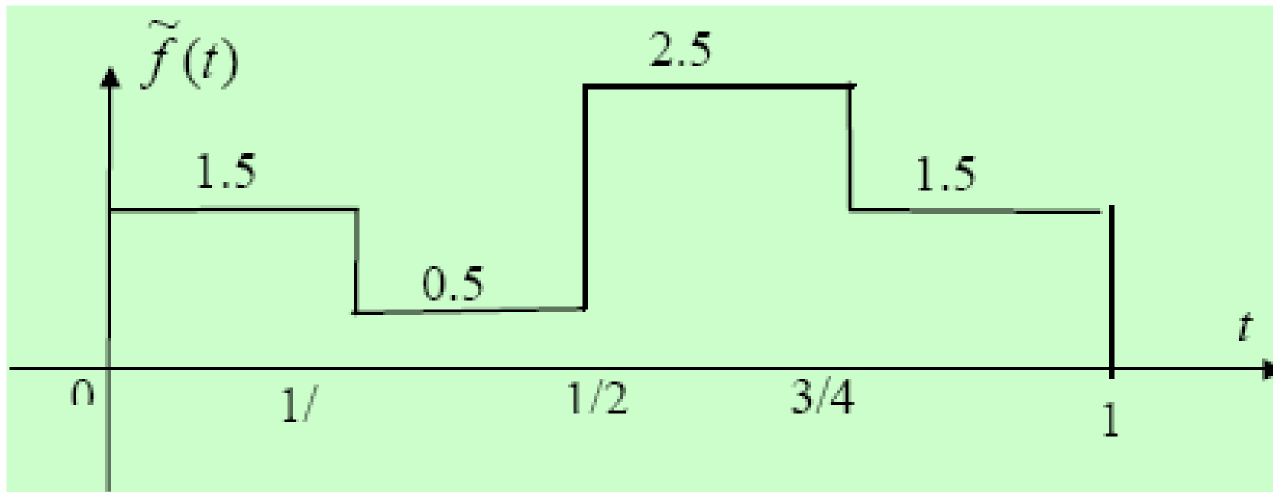
b) $f(t) \approx \tilde{f}(t) = F_1\phi_1(t) + F_2\phi_2(t) + F_3\phi_3(t)$

$$F_1 = \int_0^1 f(t)\phi_1(t)dt = 2\int_0^{1/4} 1.dt + 2\int_{1/2}^{1} 1.dt = 2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

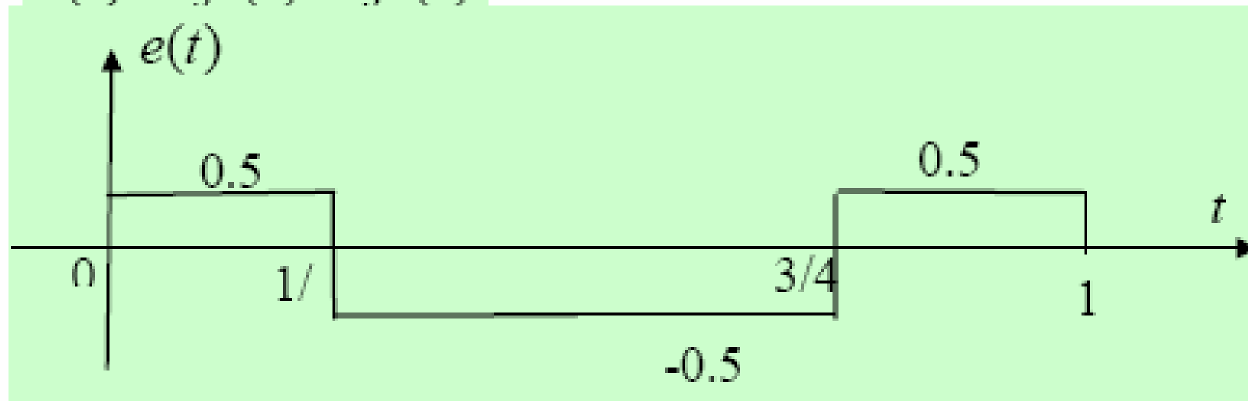
$$F_2 = \int_0^1 f(t)\phi_2(t)dt = 2\int_0^{1/4} 1.dt - 2\int_{1/2}^{1} 1.dt = -\frac{1}{2}$$

$$F_3 = \int_0^1 f(t)\phi_3(t)dt = 2\int_0^{1/4} 1.dt + 2\int_{1/2}^{3/4} 1.dt - 2\int_{3/4}^{1} 1.dt = \frac{1}{2}$$

Buradan $\tilde{f}(t) = \frac{3}{2}\phi_1(t) - \frac{1}{2}\phi_2(t) + \frac{1}{2}\phi_3(t)$ bulunur.



$e(t) = f(t) - \tilde{f}(t)$

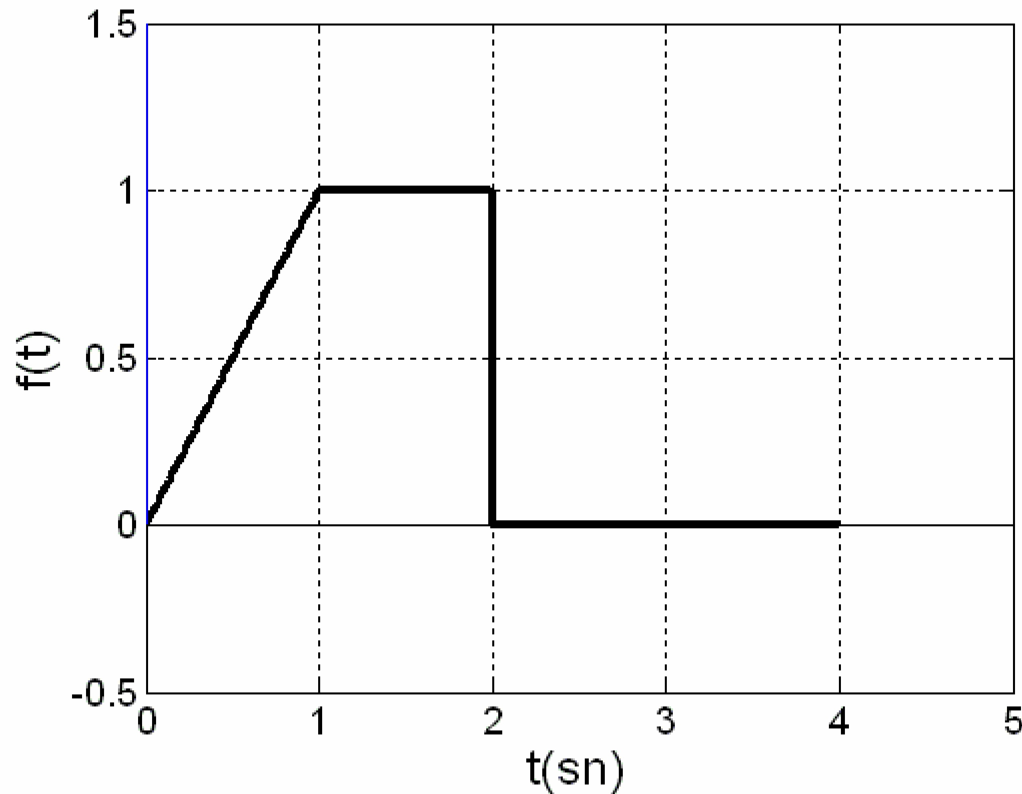


$$\int_0^1 |e(t)|^2 dt = \frac{0.25}{4} + \frac{0.25}{4} + \frac{0.25}{4} + \frac{0.25}{4} = \frac{1}{4}$$

Ödev-1) f(t) sinyali aşağıdaki gibi olduğuna göre,

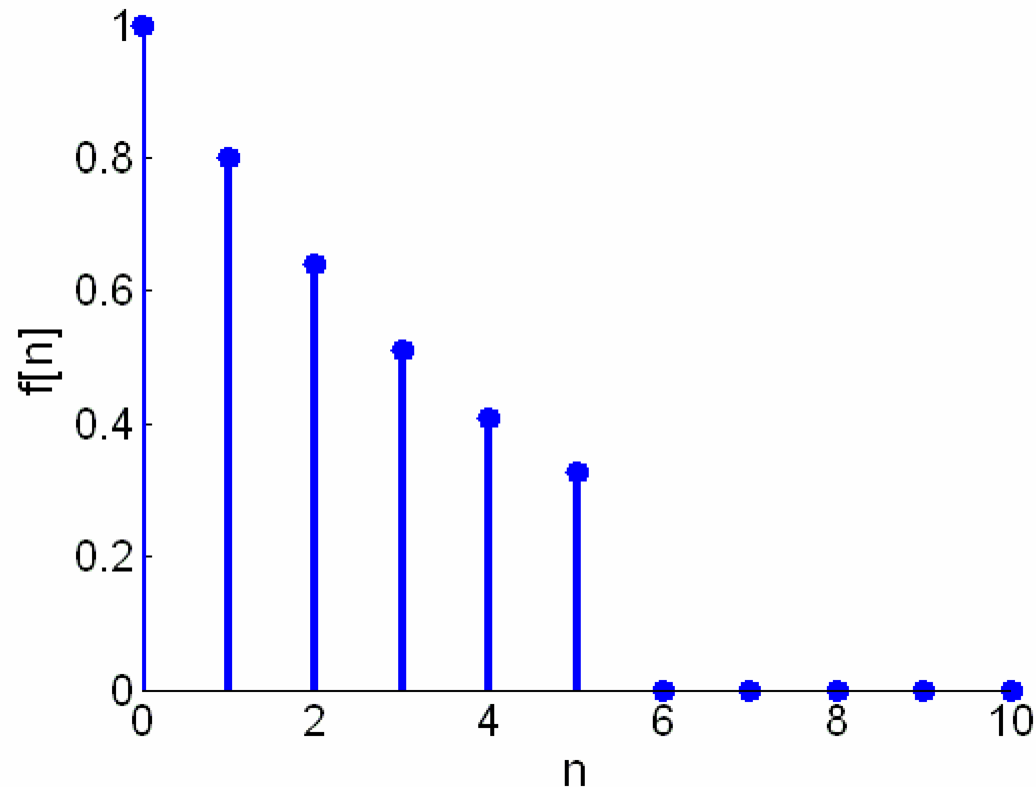
a) f(t) sinyalini MATLAB ortamında çizdiriniz.

b) a,b,c,d,e,f ve g sinyallerinin grafiklerini ölçekli olarak çiziniz.



a) $f(0.5t)$
b) $f(2t)$
c) $f(t-2)$
d) $f(t+1)$
e) $f(-t-1)$
f) $f(-t+2)$
g) $f(2t-3)$

Ödev-2) **a)** $f[n]=(0.8)^n\big(u[n]-u[n-6]\big)$ ayrık sinyalini MATLAB ortamında çizdiriniz.



b) $f[n-2]$, $f[n+1]$, $f[-n+3]$, $f[-n-1]$, $f[2n-1]$, $f[0.5n+1]$ sinyallerinin grafiklerini ölçekli olarak çiziniz.

Ödev-3)

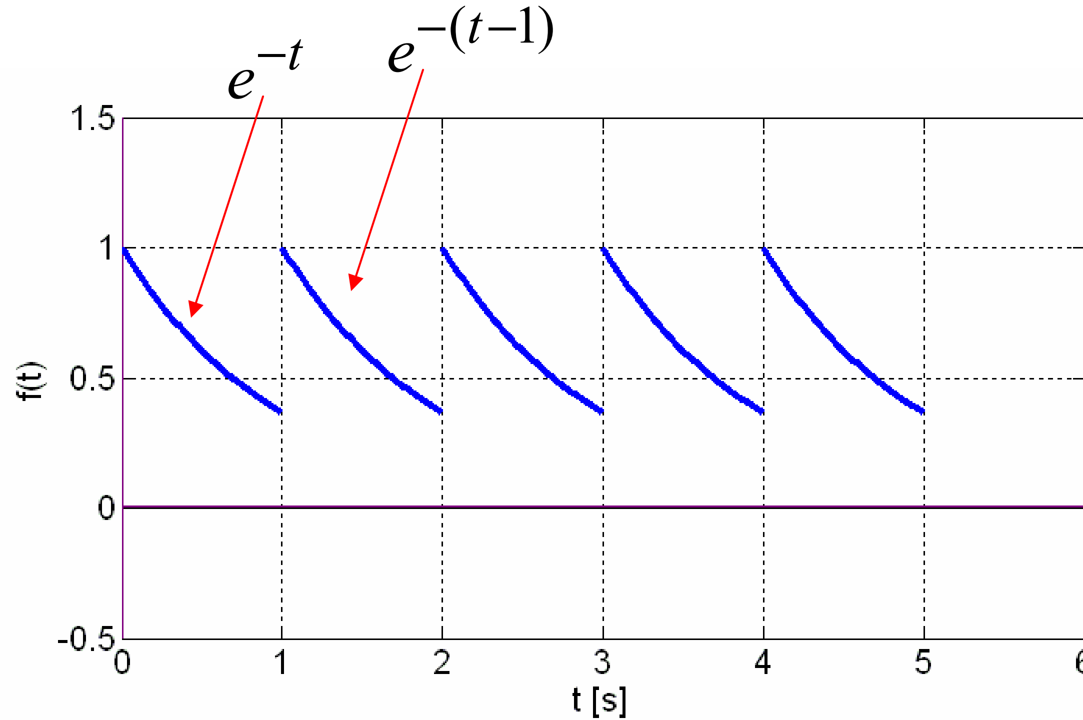
a) Şekilde verilen periyodik sinyali MATLAB otamında çizdiriniz.

b) Bu sinyalin matematiksel ifadesini tekil fonksiyonlar cinsinden yazınız.

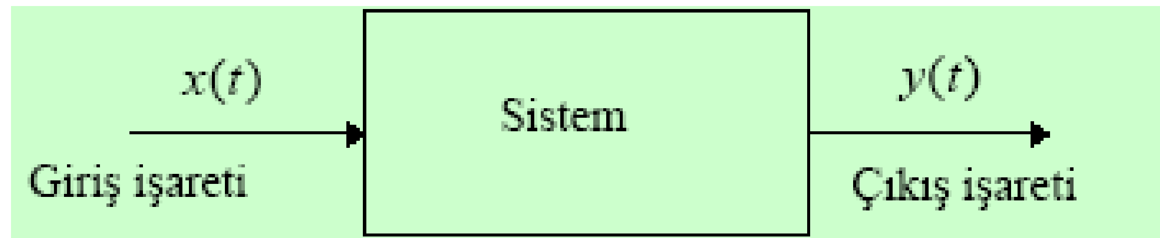
c) Bu sinyalin ortalama gücünü MATLAB ortamında ve ayrıca teorik yoldan hesaplayınız.

d) Bu sinyalin 10 Hz de örneklenmiş ayrık biçimini MATLAB ortamında çizdiriniz.

e^{-t} $e^{-(t-1)}$



2. Doğrusal Zamanla Değişmeyen (DZD) Sürekli Sistemlerin Zaman Domeni Modelleri



$$x(t) \rightarrow y(t)$$

- Diferansiyel Denklem Modeli
- Birim Vuruş Tepkesi Modeli
- Durum Uzayı Modeli

Doğrusallık özelliği:

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) \quad \text{ve} \quad x_2(t) \rightarrow y_2(t)$$

$$ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$$

Doğrusallık özelliği süperpozisyon ve homojenlik özelliğiyle yakından ilgilidir:

Süperpozisyon (toplanırlık) özelliği:

$$x_1(t) \to y_1(t)$$
$$x_2(t) \to y_2(t)$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$x_n(t) \to y_n(t)$$

$$x_1(t) + x_2(t) + \ldots + x_n(\mathrm{t}) \to y_1(t) + y_2(t) + \ldots + y_n(\mathrm{t})$$

Homojenlik özelliği:

$$x_1(t) \to y_1(t)$$
$$ax_1(t) \to ay_1(t)$$

Örnek: $y(t) = \int x(t)dt$

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = \int x_1(t)dt$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = \int x_2(t)dt$$

$$ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow \int (ax_1(t) + bx_2(t))\,dt = \int ax_1(t)\,dt + \int bx_2(t)\,dt$$

Örnek:

$$y(t) = x^2(t)$$

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1^2(t)$$

$$\mathrm{x}_2(\mathrm{t}) \rightarrow \mathrm{y}_2(\mathrm{t}) = \mathrm{x}_2^2(\mathrm{t})$$

$$ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow \left(ax_1(t) + bx_2(t) \right)^2 \neq ax_1^2(t) + bx_2^2(t)$$

Zamanla Değişmezlik Özelliği

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

$$x(t-t_0) \rightarrow y(t-t_0)$$

Örnek:

$$y(t) = tx(t)$$

$$x(t) \rightarrow y(t) = tx(t)$$

$$x(t-t_0) \rightarrow tx(t-t_0) \neq (t-t_0)x(t-t_0)$$

Örnek:

$$y(t) = \int x(t)dt$$

$$x(t) \rightarrow y(t) = \int x(t)dt$$

$$x(t-t_0) \rightarrow \int x(t-t_0)dt$$

Örnek:

$$y(t) = x^2(t)$$

$$x(t) \rightarrow y(t) = x^2(t)$$

$$x(t-t_0) \rightarrow x^2(t-t_0)$$

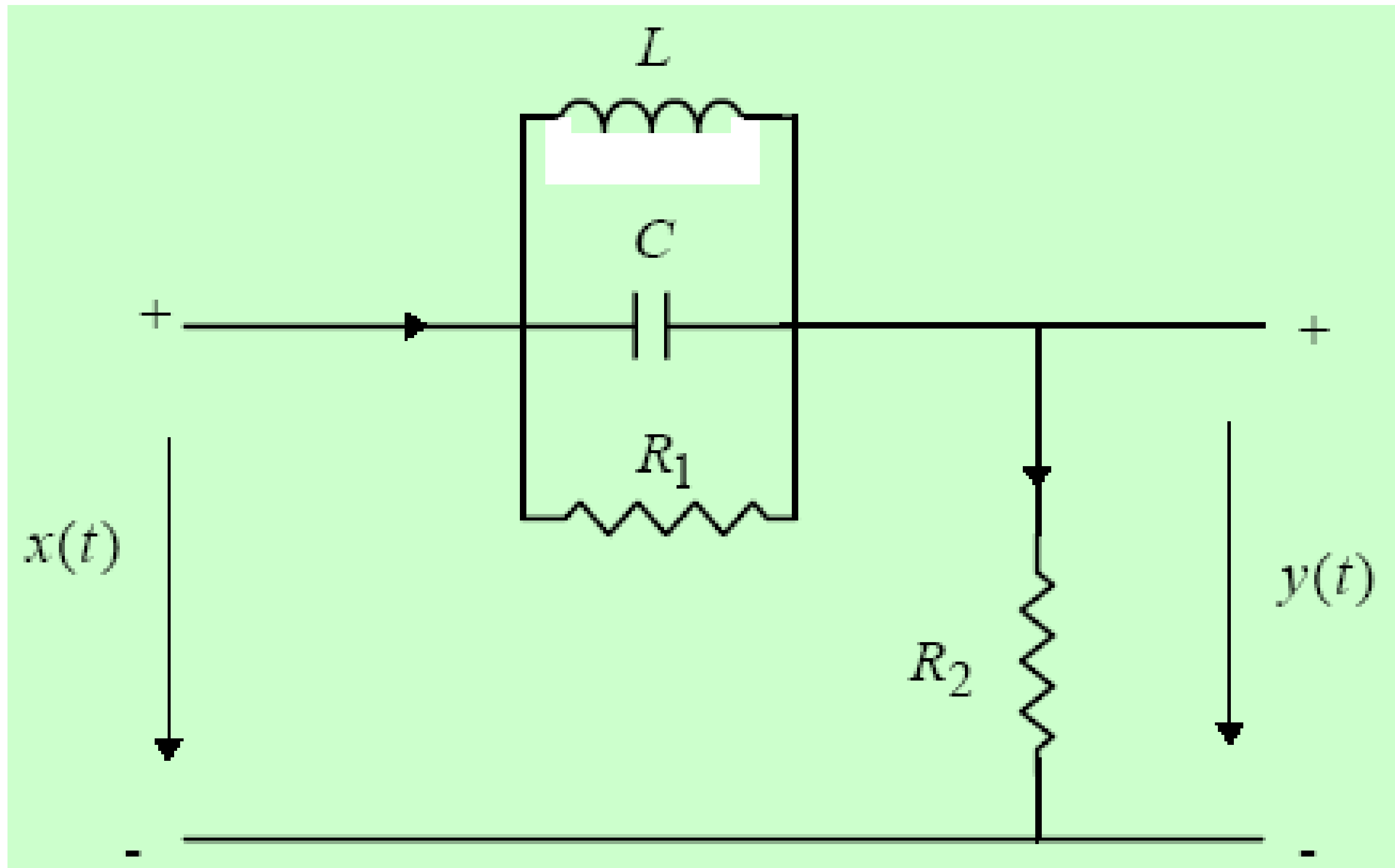
Belleksiz (statik)-Bellekli (dinamik) Sistem: Doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemin çıkışının belli bir zamandaki değeri sadece girişin o andaki değerine bağlıysa bu sistem *belleksiz (statik)* sistem olarak adlandırılır. Bu tür sistemlerin matematiksel modelleri diferansiyel denklem içermezler. Eğer doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemin çıkışının belli bir zamandaki değeri girişin o andaki ve daha öncezamanlardaki değerlerine bağlı oluyorsa, bu sistem *bellekli (dinamik)* sistem olarak adlandırılır. Bu tür sistemlerin matematiksel modelleri diferansiyel denklem içerirler.

Diferansiyel Denklem Modeli

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m}, \qquad N \geq M$$

$$y(0), \frac{dy(0)}{dt}, \ldots, \frac{d^{N-1} y(0)}{dt^{N-1}}$$

Örnek:



$$v_c(t) = x(t) - y(t)$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v_L(t)dt + I_L(0)$$

$$i_C(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$i_R(t) = \frac{v_c(t)}{R_1}$$

$$y(t) = \left(i_L(t) + i_C(t) + i_R(t)\right)R_2$$

$$y(t) = \frac{R_2}{L}\int_0^t v_c(t)dt + R_2 I_L(0) + R_2 C\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{R_2}{R_1}v_c(t)$$

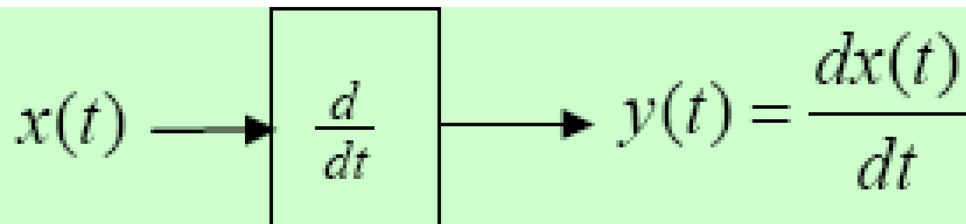
$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{R_2}{L}v_c(t) + R_2 C\frac{d^2 v_c(t)}{dt^2} + \frac{R_2}{R_1}\frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} - \frac{dy(t)}{dt}$$

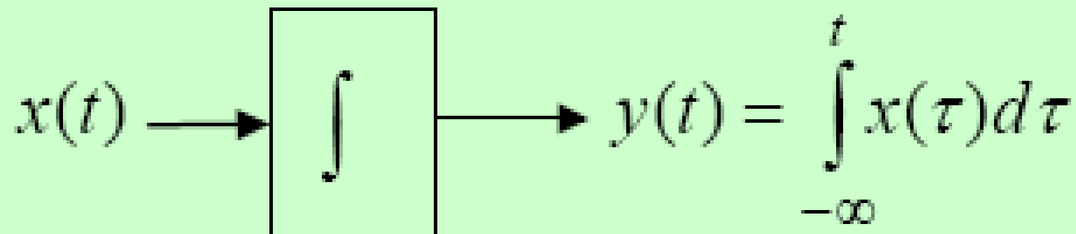
$$R_2C\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\frac{dy(t)}{dt}+\frac{R_2}{L}y(t)$$

$$=\frac{R_2}{L}x(t)+\frac{R_2}{R_1}\frac{dx(t)}{dt}+R_2C\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

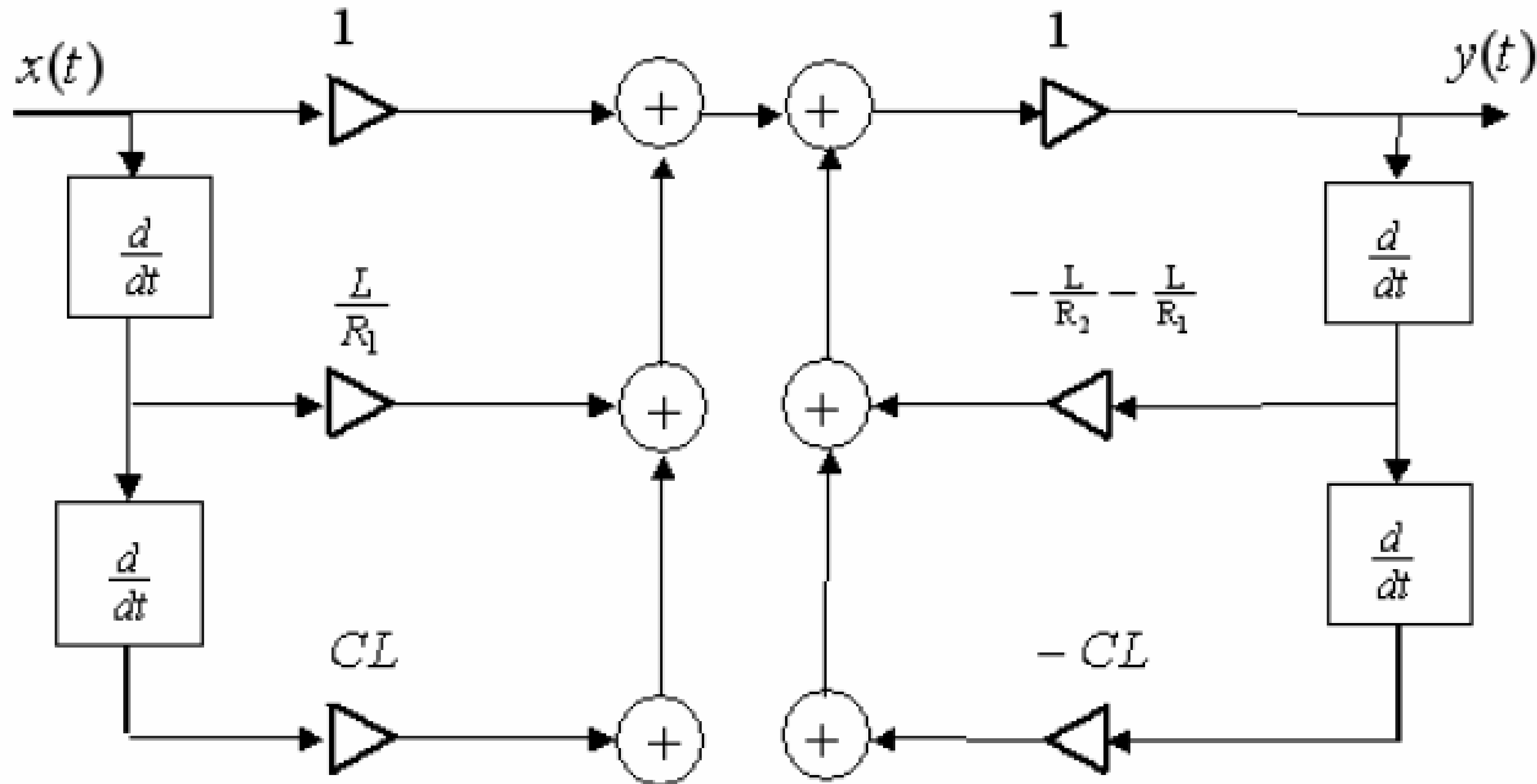
$$y(t)=x(t)+\frac{L}{R_1}\frac{dx(t)}{dt}+LC\frac{d^2x(t)}{dt^2}-LC\frac{d^2y(t)}{dt^2}-\left(\frac{L}{R_2}+\frac{L}{R_1}\right)\frac{dy(t)}{dt}$$



Türev alıcı



İntegral alıcı

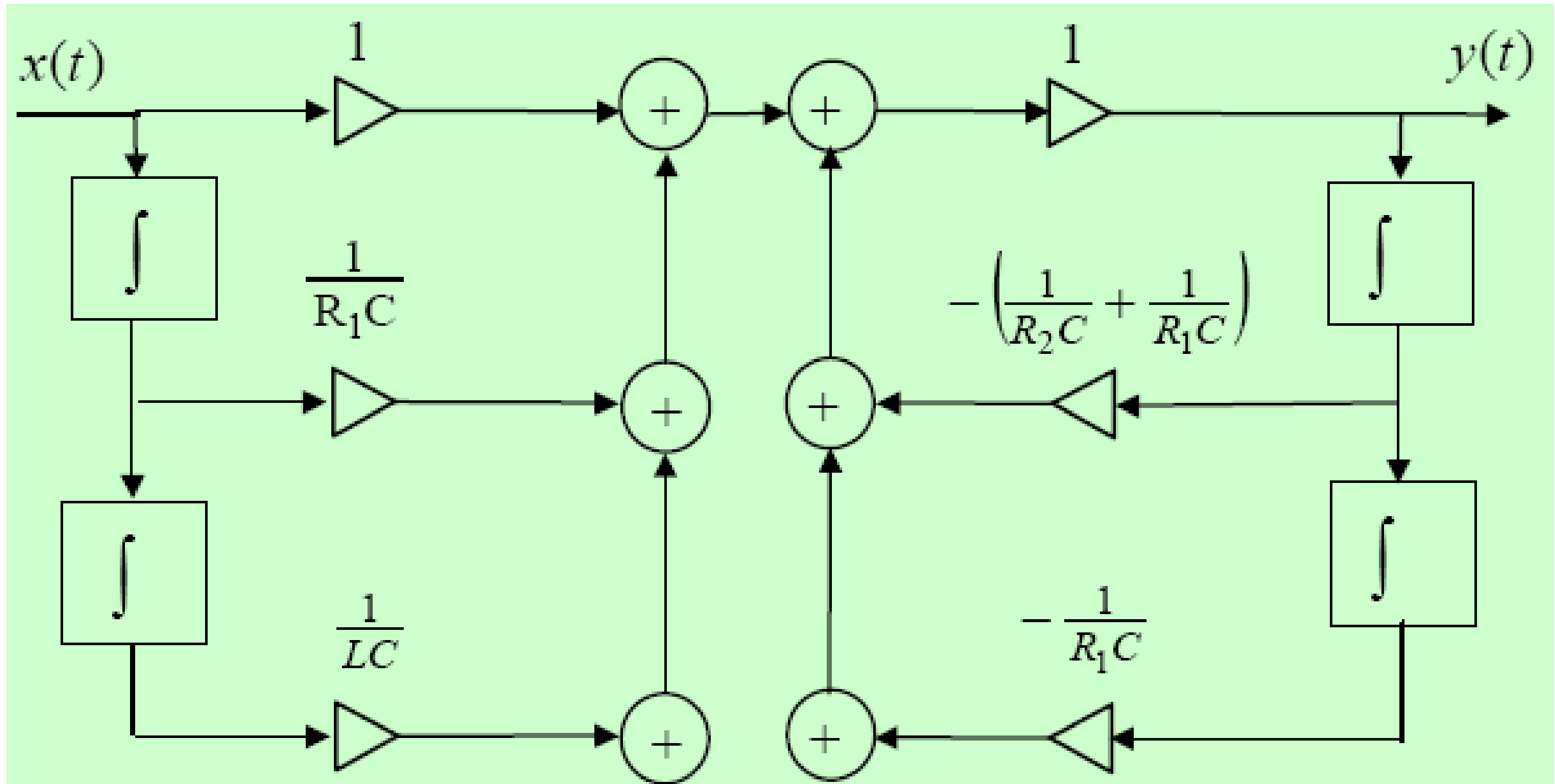


x(t)
1
1
y(t)
d/dt
d/dt
L/R1
− L/R2 − L/R1
d/dt
d/dt
CL
− CL

$$R_2 C y(t) + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \int y(t)dt + \frac{R_2}{L} \iint y(t)$$

$$= \frac{R_2}{L} \iint x(t) + \frac{R_2}{R_1} \int x(t) + R_2 C x(t)$$

$$y(t) = x(t) + \frac{1}{R_1 C} \int x(t) + \frac{1}{LC} \iint x(t) - \left(\frac{1}{R_2 C} + \frac{1}{R_1 C}\right) \int y(t) - \frac{1}{R_1 C} \iint y(t)$$



x(t)
1
1
y(t)
$\frac{1}{R_1C}$
$-\left(\frac{1}{R_2C}+\frac{1}{R_1C}\right)$
$\frac{1}{LC}$
$-\frac{1}{R_1C}$

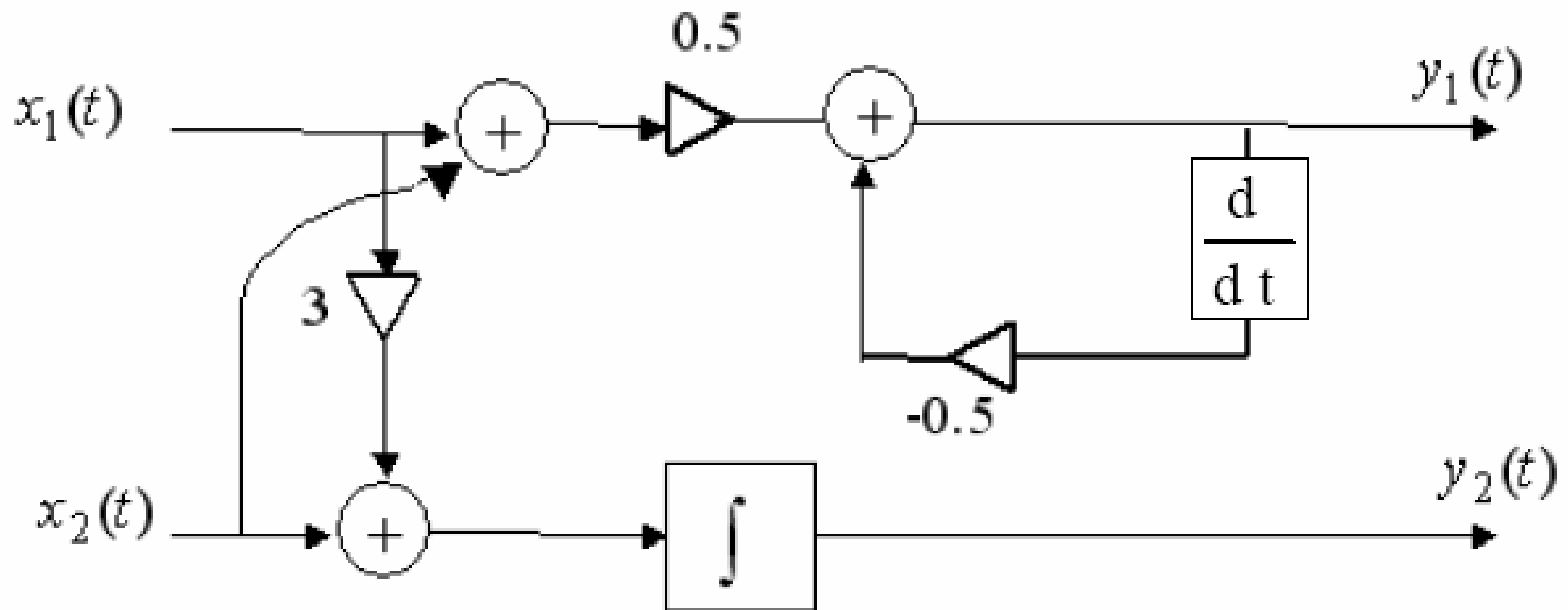
Örnek: Aşağıdaki denklem takımıyla verilen sistemin blok şemasını çiziniz

$$\frac{dy_1(t)}{dt} + 2y_1(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = 3x_1(t) + x_2(t)$$

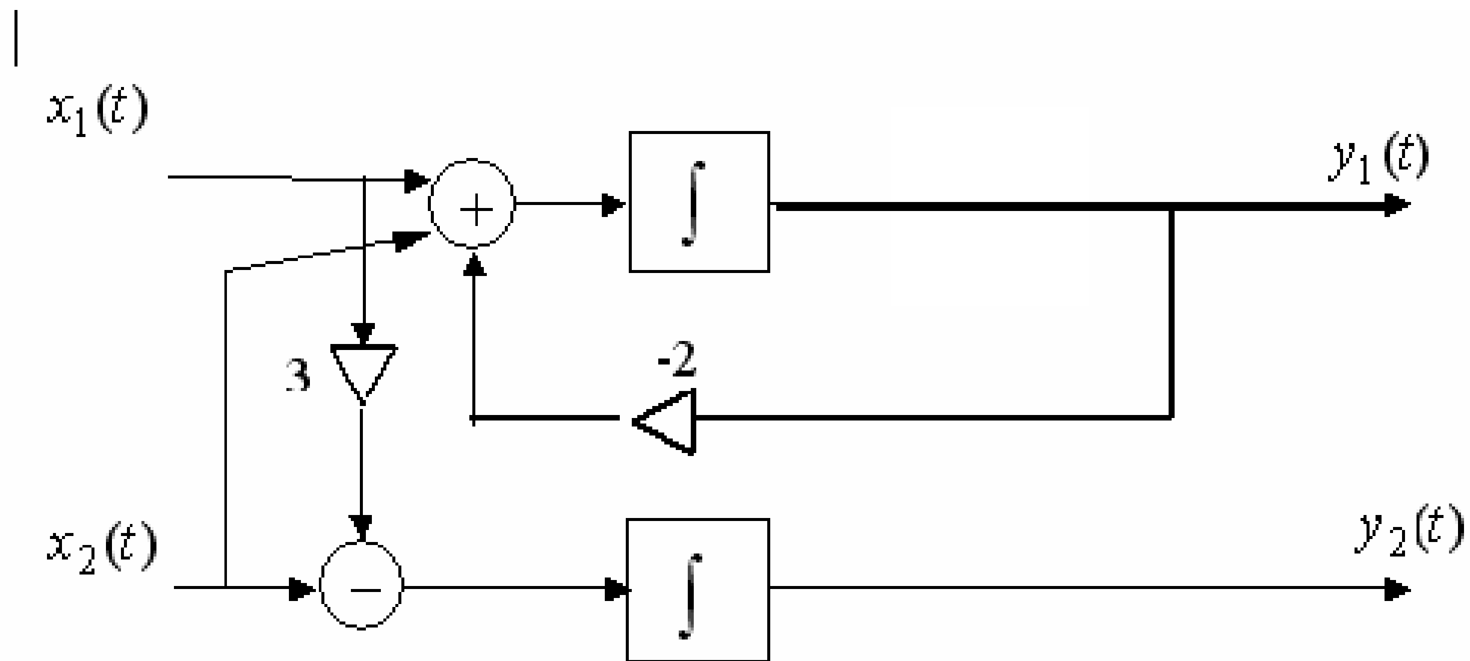
$$y_1(t) = -\tfrac{1}{2}\frac{dy_1(t)}{dt} + \tfrac{1}{2}x_1(t) + \tfrac{1}{2}x_2(t)$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = 3x_1(t) + x_2(t)$$



$$y_1(t) = \int x_1(t)dt + \int x_2(t)dt - 2\int y_1(t)dt$$

$$y_2(t) = \int 3x_1(t)dt + \int x_2(t)dt$$



Diferansiyel Denklem Modelinin Çözümü

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m}, \qquad N \geq M$$

1- $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ formunda çözüm:

(Tam çözüm=homojen çözüm+özel çözüm)

Homojen çözüm:

$$a_N \frac{d^N y(t)}{dt^N} + a_{N-1} \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = 0$$

$$\lambda = \frac{d}{dt}$$

$$y(t)\left(a_N \lambda^N + a_{N-1}\lambda^{N-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0\right) = 0$$

$$a_N \lambda^N + a_{N-1}\lambda^{N-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

- Kökler katsız ise:

Karakteristik denklemin N adet kökü $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$

katsız ise homojen çözüm aşağıdaki formdadır:

$$y_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + c_N e^{\lambda_N t}$$

- Katlı kök varsa:

karakteristik denklemin k ıncı kökü λ_k , r katlı olsun

Bu durumda homojen çözüm bu kök için aşağıdaki formdadır:

$$d_0 e^{\lambda_k t} + d_1 t e^{\lambda_k t} + d_2 t^2 e^{\lambda_k t} + \ldots + d_{r-1} t^{r-1} e^{\lambda_k t}$$

Özel çözüm:

- Denklemin sağ tarafı $p_i(t)$ şeklinde bir polinom ise

özel çözüm: $y_p(t) = K_i t^i + K_{i-1} t^{i-1} + \ldots + K_1 t + K_0$

- Denklemin sağ tarafı: $e^{\alpha t} p_i(t)$

özel çözüm: $y_p(t) = e^{\alpha t}(K_i t^i + K_{i-1} t^{i-1} + \ldots + K_1 t + K_0)$

- Denklemin sağ tarafı: $e^{\alpha t} p_i(t)(d_1 Sin\beta t + d_2 Cos\beta t)$

özel çözüm:

$$y_p(t) = e^{\alpha t}\Big[Sin\beta t(K_i t^i + K_{i-1} t^{i-1} + .. + K_1 t + K_0) + \\ + Cos\beta t(L_i t^i + L_{i-1} t^{i-1} + .. + L_1 t + L_0)\Big]$$

Özel çözümde karşılaşılan özel durumlar:

- Özel çözümün herhangi bir terimi, katsayıları dikkate alınmaksızın aynı zamanda homojen çözümün bir terimine benzeyebilir. Bu durumda, özel çözümün bu terimi homojen çözümün benzeyen terimine benzemeyecek şekilde, t^m çarpılmalıdır. Burada ***m***, benzerlik olmayacak şekilde seçilebilecek en küçük tamsayıdır.
- Giriş işareti verilen formların bir kombinasyonu biçiminde olabilir. Bu durumda özel çözümün formu da karşılık gelen formların uygun bir şekilde birleştirilmesiyle elde edilir

•Özel çözüm formu belirlendikten sonra bu form diferansiyel denklemin sol tarafında bulunan *y(t)* nin yerine yazılır.

•Gerekli türev alma işlemlerinden sonra sol taraf eşitliğin sağ tarafında yer alan fonksiyonların formuna göre düzenlenir.

•Aynı formdaki ifadelerin katsayılarının birbirine eşitlenmesiyle elde edilen denklem takımı çözülerek *K* ve *L* katsayıları belirlenir.

$$\left(y_h(t) + y_p(t)\right)\Big|_{t=0} = y(0)$$

$$\frac{d}{dt}\left(y_h(t) + y_p(t)\right)\Big|_{t=0} = y'(0)$$

.

.

.

$$\frac{d^{N-1}}{dt^{N-1}}\left(y_h(t) + y_p(t)\right)\Big|_{t=0} = y^{(N-1)}(0)$$

N adet doğrusal denklemin çözülmesiyle homojen çözümdeki bilinmeyen katsayılar bulunur. Böylece homojen çözüm ile özel çözümün toplanmasıyla tam çözüm elde edilmiş olur.

2- $y(t) = y_{sg}(t) + y_{sd}(t)$ formunda çözüm

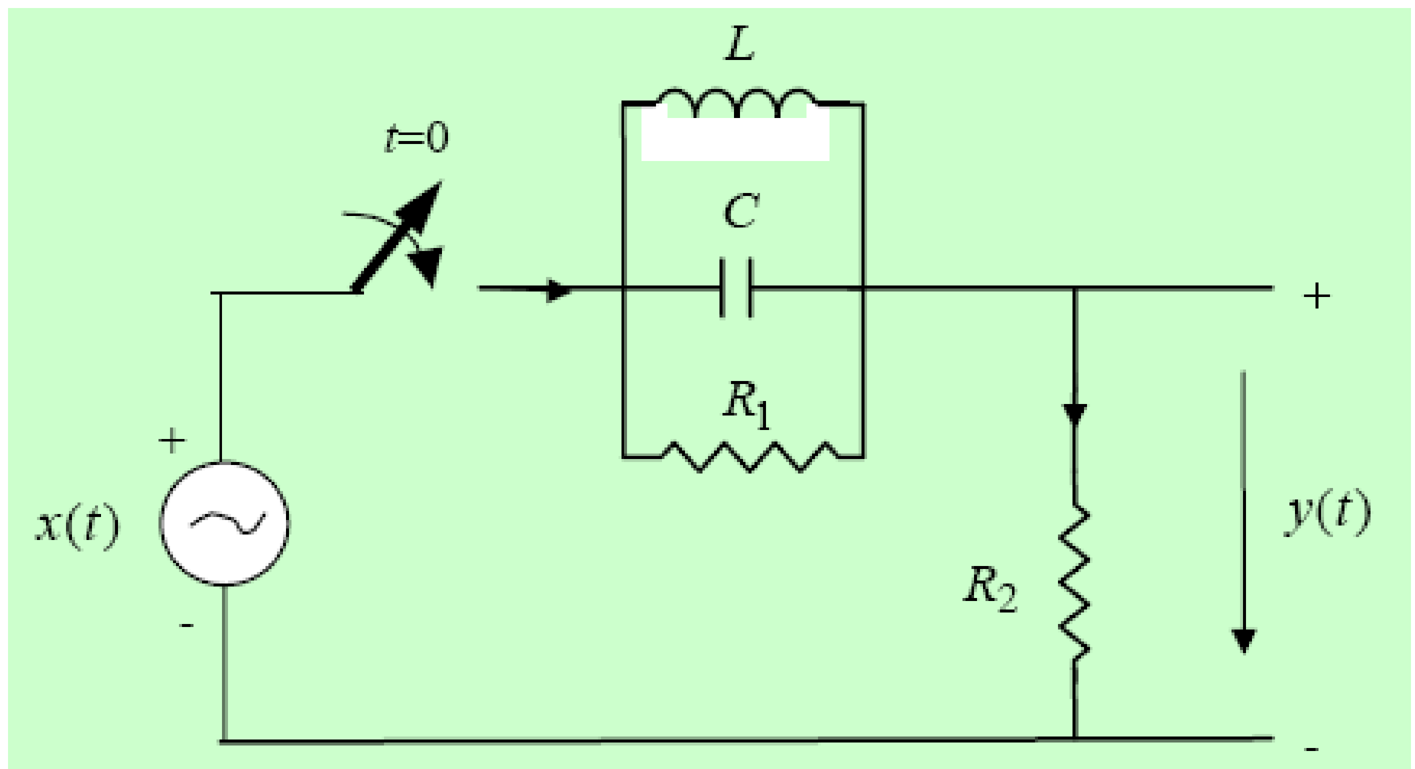
(Tam çözüm= sıfır girişli çözüm+sıfır durumlu çözüm)

Sıfır girişli çözüm: Bu çözüm formundaki c ve d katsayıları, tam çözümü elde etmeden önce başlangıç değerleri kullanılarak hesaplanır.

Sıfır durumlu çözüm: Bu çözüm sistemin birim vuruş tepkesiyle giriş işaretinin katlamasıdır.

$$y_{sd}(t) = \int_0^t x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

Örnek:



$x(t) = Sin\,2t \quad L = 1H, \quad C = 0.5F, \quad R_1 = 1\Omega$ ve $R_2 = 2\Omega$

$t \leq 0$ için bütün başlangıç değerleri sıfır

$a) \quad y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

$b) \quad y(t) = y_{sg}(t) + y_{sd}(t)$

$t \geq 0$

$$R_2C\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\frac{dy(t)}{dt}+\frac{R_2}{L}y(t)$$

$$=\frac{R_2}{L}x(t)+\frac{R_2}{R_1}\frac{dx(t)}{dt}+R_2C\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=2x(t)+2\frac{dx(t)}{dt}+\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

$a)$ $\quad y(t)=y_h(t)+y_p(t)$ formunda çözüm

Homojen Çözüm:

$$\lambda^2+3\lambda+2=0 \quad\rightarrow\quad \lambda_1=-1 \;\text{ ve }\; \lambda_2=-2$$

$$y_h(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}$$

Özel Çözüm:

$$y_p(t) = K_0 Sin2t + L_0 Cos2t$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(y_p(t)\right) + 3\frac{d}{dt}\left(y_p(t)\right) + 2y_p(t) = 4Cos2t - 2Sin2t$$

Eşitliğin her iki yanındaki benzer dereceden terimlerin katsayıları birbirine eşitlenerek bilinmeyen katsayılar bulunur.

$L_0 = 0.1$ $K_0 = 0.7$

Bu katsayılar özel çözümde yerine yazılarak özel çözüm bulunur

$$y_p(t) = 0.7Sin2t + 0.1Cos2t$$

Tam Çözüm:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

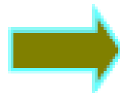
$$= c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + 0.7 Sin2t + 0.1 Cos2t$$

$$y(0) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + 0.7 Sin2t + 0.1 Cos2t \Big|_{t=0^+} = 0$$

$$y'(0) = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t} + 1.4 Cos2t - 0.2 Sin2t \Big|_{t=0} = 2$$

$$c_1 + c_2 + 0.1 = 0$$

$$-c_1 - 2c_2 + 1.4 = 2$$



$$c_1 = 0.4$$

$$c_2 = -0.5$$



$$y(t) = 0.4 e^{-t} - 0.5 e^{-2t} + 0.7 Sin2t + 0.1 Cos2t$$

b) $y(t) = y_{sg}(t) + y_{sd}(t)$ formunda çözüm

Sıfır girişli çözüm:

$$y_{sg}(t) = c_1 e^{-t} u(t) + c_2 e^{-2t} u(t)$$

$$c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \Big|_{t=0^+} = y(0^+)$$

$$-c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t} \Big|_{t=0^+} = y'(0^+)$$

$$y'(0^+) = x'(0^+) = 0$$

$\Rightarrow$ $c_1 + c_2 = 0$, $-c_1 - 2c_2 = 0$ $\Rightarrow$ $c_1 = c_2 = 0$ $\Rightarrow$ $y_{sg}(t) = 0$

Sıfır durumlu çözüm:

$$y_{sd}(t) = \int_0^t x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2x(t) + 2x'(t) + x''(t)$$

$$h''(t) + 3h'(t) + 2h(t) = 2\delta(t) + 2\delta'(t) + \delta''(t)$$

$$h(t) = e^{-t}u(t) - 2e^{-2t}u(t) + \delta(t)$$

$$y_{sd(t)} = \int_0^t Sin2\tau h(t-\tau) d\tau$$

$$y_{sd}(t) = \int_0^t Sin2\tau \left(\mathrm{e}^{-(t-\tau)} - 2\mathrm{e}^{-2(t-\tau)} + \delta(t-\tau) \right) d\tau$$

$$y_{sd}(t) = e^{-t}\int_0^t Sin2\tau e^{\tau} d\tau - 2\, e^{-2t}\int_0^t Sin2\tau e^{2\tau} d\tau + \int_0^t Sin2\tau\delta(t-\tau)d\tau$$

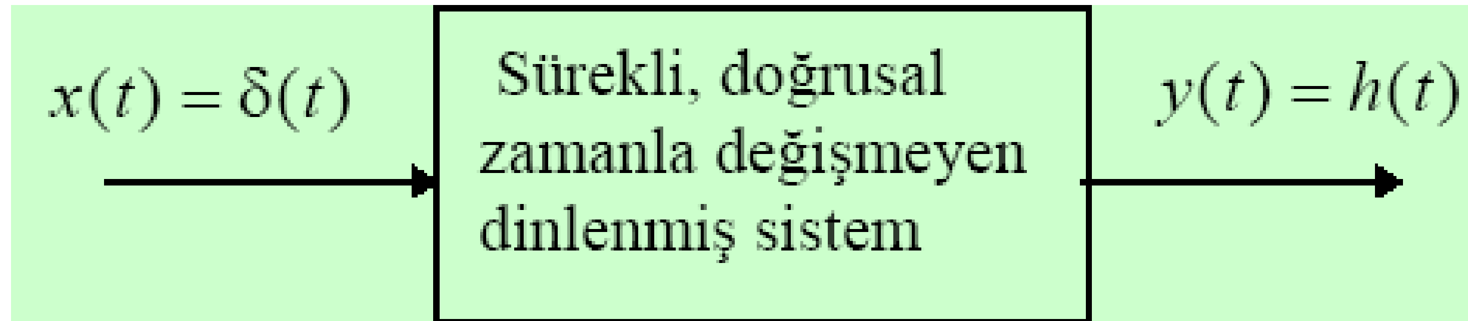
$$\int e^{ax} Sinbxdx = \frac{e^{ax}\left(aSinbx - bCosbx\right)}{a^2+b^2}$$

$$y_{sd}(t) = \left(\tfrac{1}{5}e^{-t}e^{\tau}\left(Sin2\tau - 2Cos2\tau\right) - 2\tfrac{1}{8}e^{-2t}e^{2\tau}\left(2Sin2\tau - 2Cos2\tau\right) + Sin2t\right)\Big|_0^t$$

$$y_{sd}(t) = \left(\tfrac{1}{5}\left(Sin2t - 2Cos2t\right) - \tfrac{1}{4}\left(2Sin2t - 2Cos2t\right) + Sin2t\right)$$
$$- \tfrac{1}{5}e^{-t}\left(-2\right) + \tfrac{1}{4}e^{-2t}\left(-2\right)$$

$$y_{sd}(t) = 0.4e^{-t} - 0.5e^{-2t} + 0.7Sin2t + 0.1Cos2t = y(t)$$

Birim vuruş tepkesi modeli



$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$\delta(t) \rightarrow h(t)$$

$$a\delta(t-\tau) \rightarrow ah(t-\tau)$$

$$x(\tau)\delta(t-\tau) \rightarrow x(\tau)h(t-\tau)$$

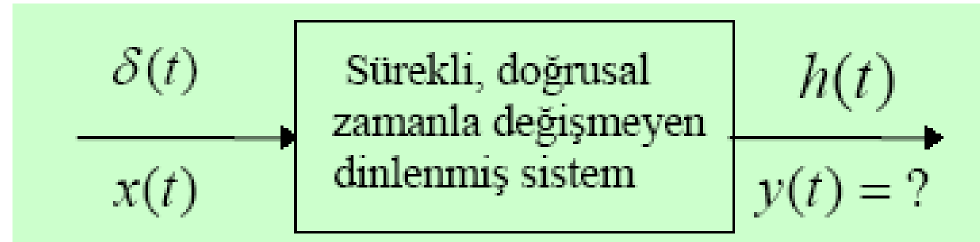
$$x(\tau) = \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} x(t)\delta(t-\tau)dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(\tau-t)d\tau$$

$$\delta(\tau-t) = \delta(t-\tau)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Örnek:



$x(t)$

A

t

0

a

$h(t)$

B

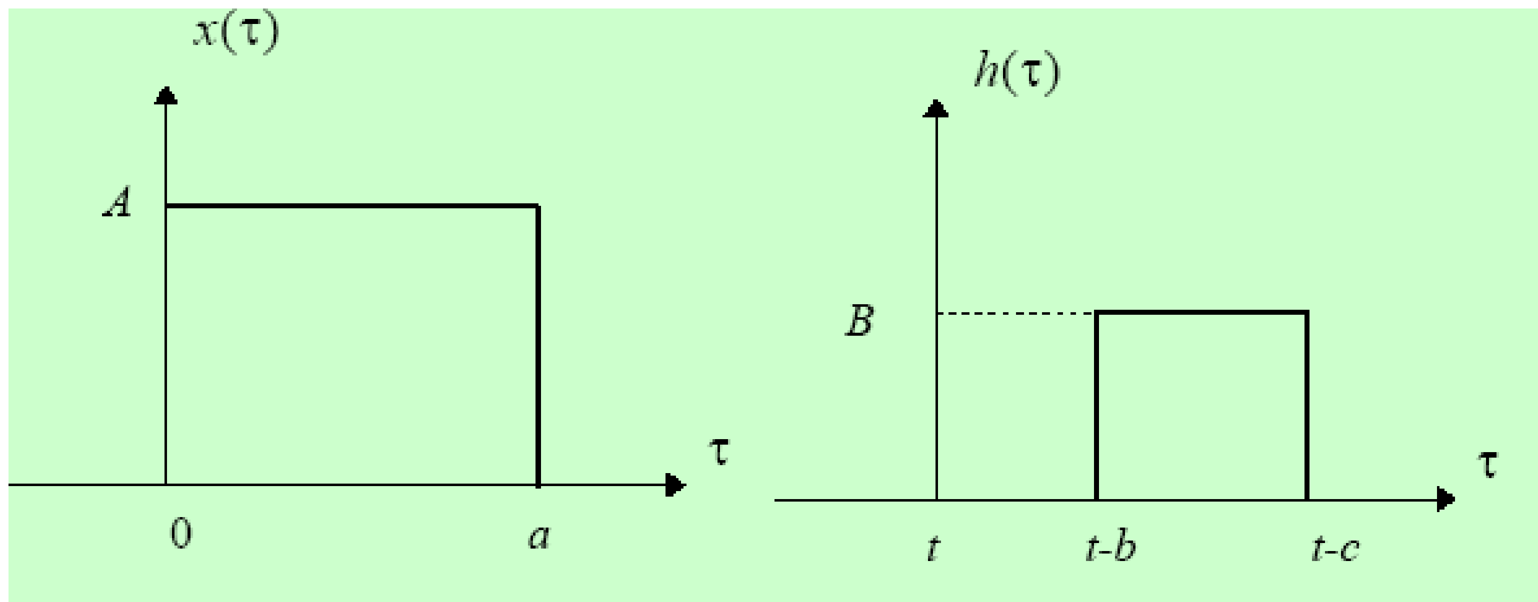
t

0

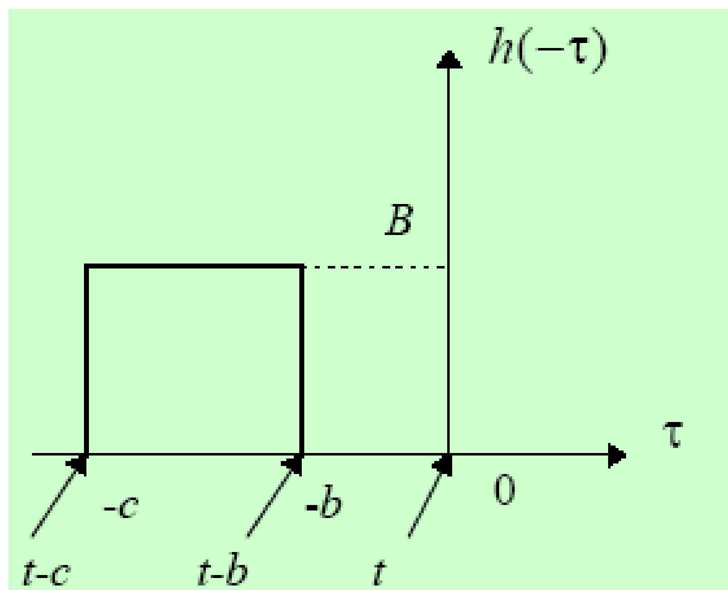
b

c

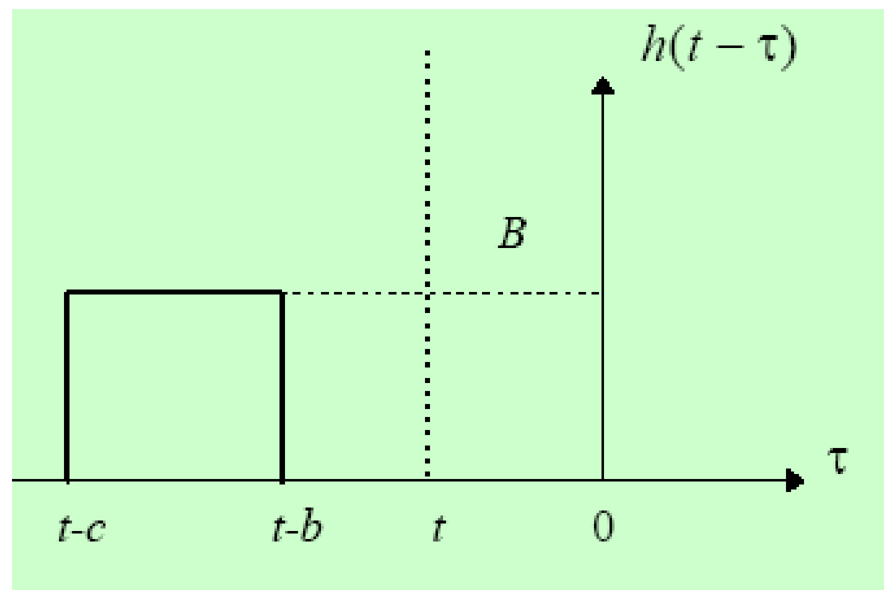
$$c - b < a$$



x(τ)
A
τ
0
a
h(τ)
B
τ
t
t-b
t-c



h(−τ)
B
τ
-c
-b
0
t-c
t-b
t

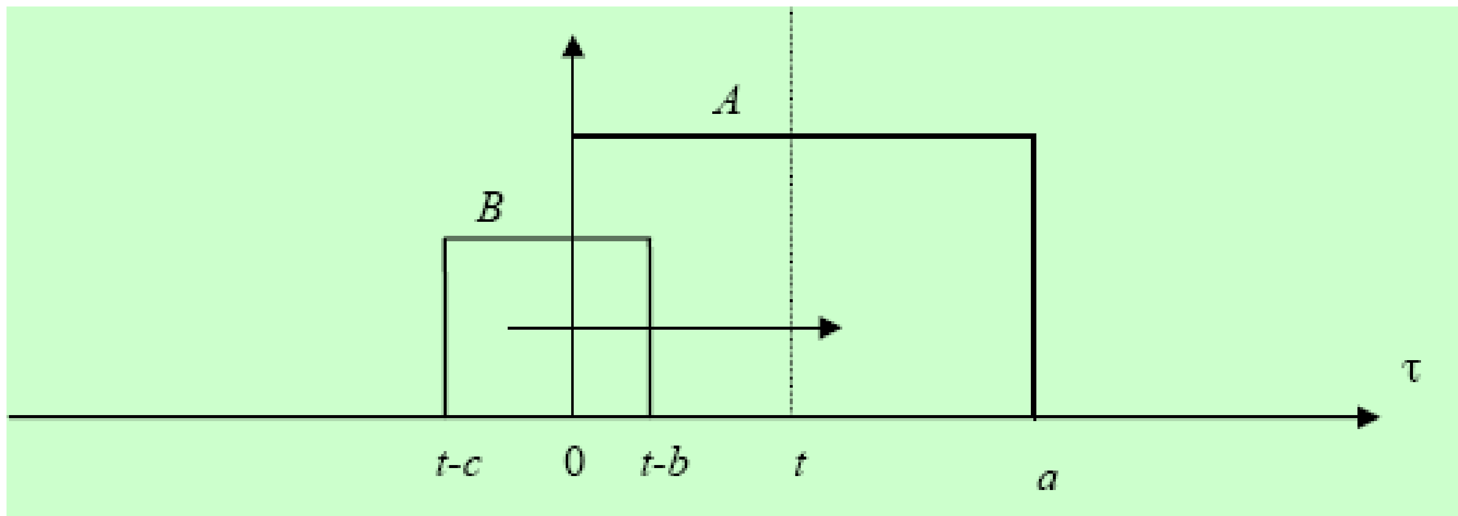


h(t − τ)
B
τ
t-c
t-b
t
0

A

B

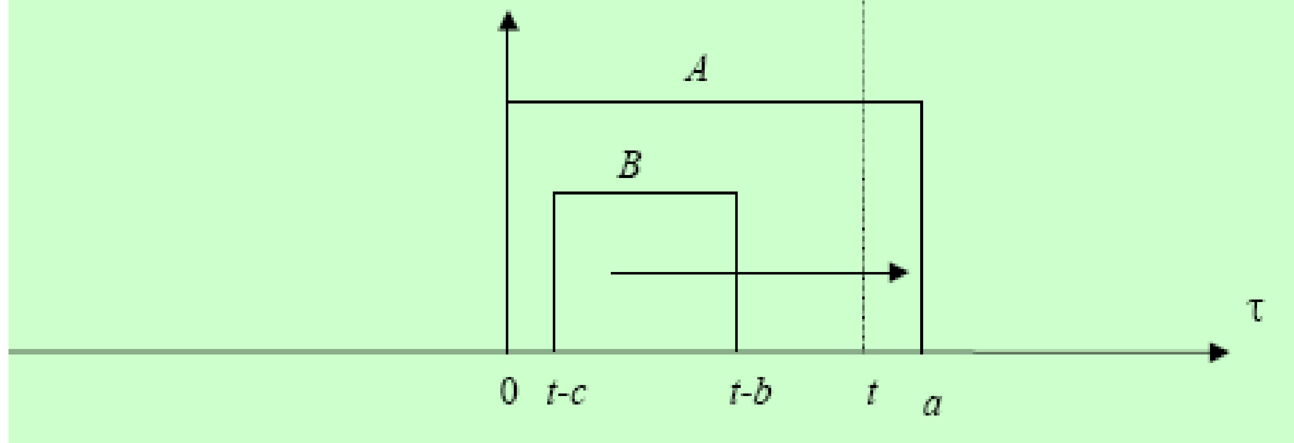
t-c t-b t 0 a τ



$$y_1(t) = \int_0^{t-b} AB\,d\tau = AB\tau \Big|_0^{t-b} = AB(t-b)$$

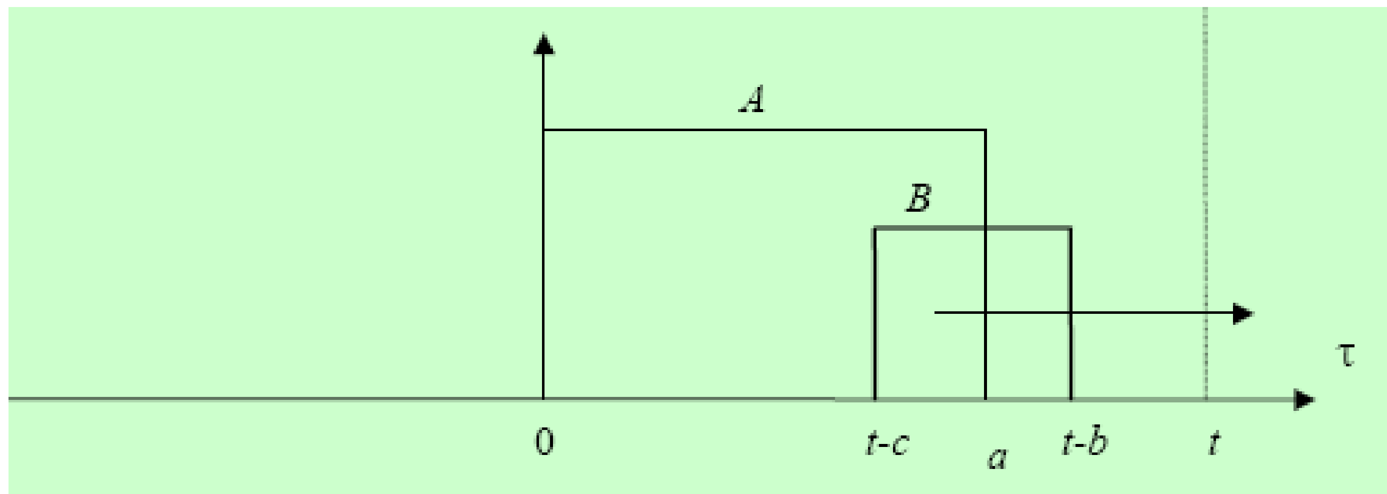
$$b \le t \le c$$

Sinyaller ve Sistemler; Ali Gangal;



$$y_2(t)=\int_{t-c}^{t-b} ABd\tau = AB\tau\Big|_{t-c}^{t-b} = AB(t-b-t+c)=AB(c-b)$$

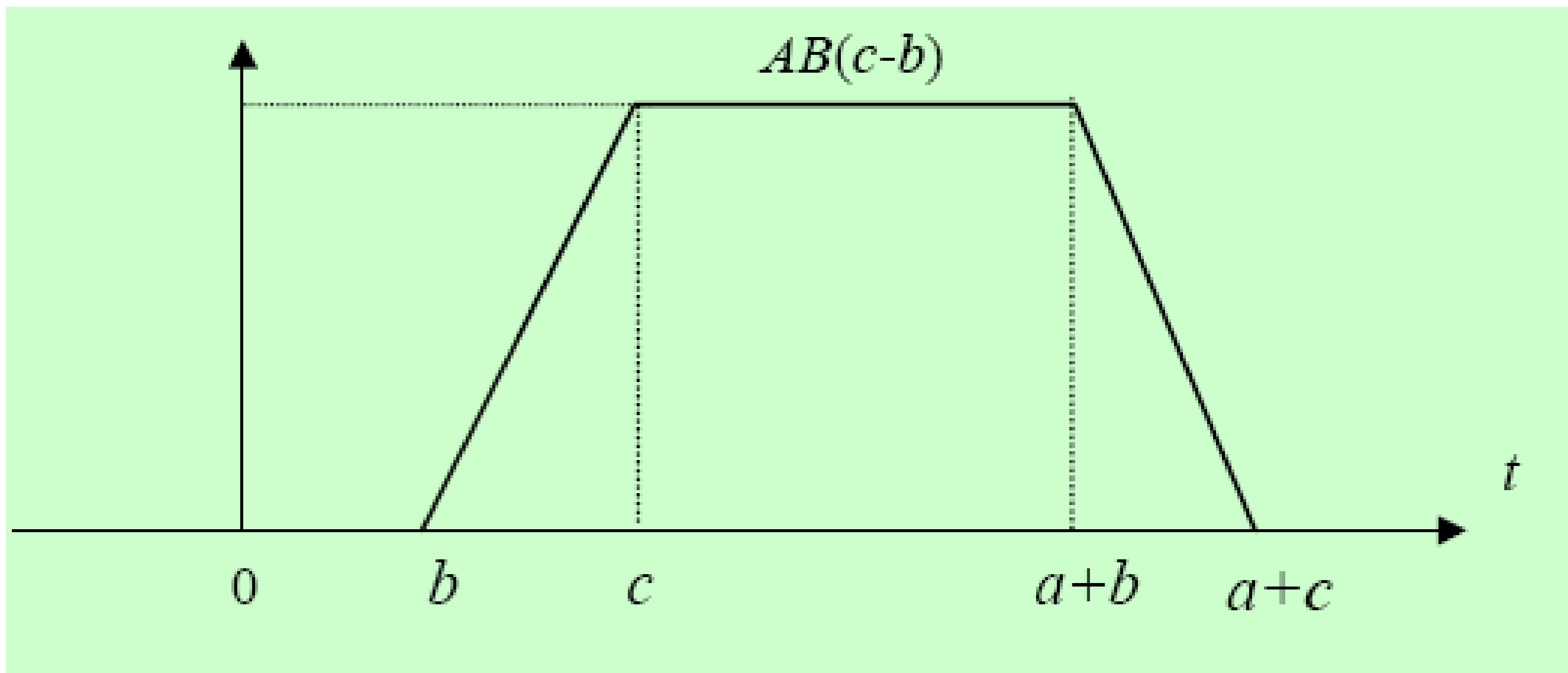
$$c \le t \le a+b$$



$$y_3(t)=\int_{t-c}^{a} ABd\tau = AB\tau\Big|_{t-c}^{a} = AB(a+c-t)$$

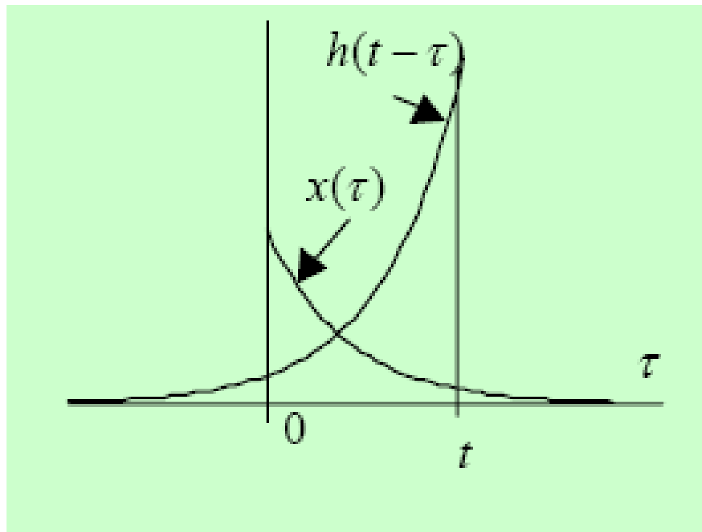
$$a+b \le t \le a+c$$

emler; Ali Gangal;
KTÜ Elektrik-Elektronik Müh. Böl.
neni Modelleri

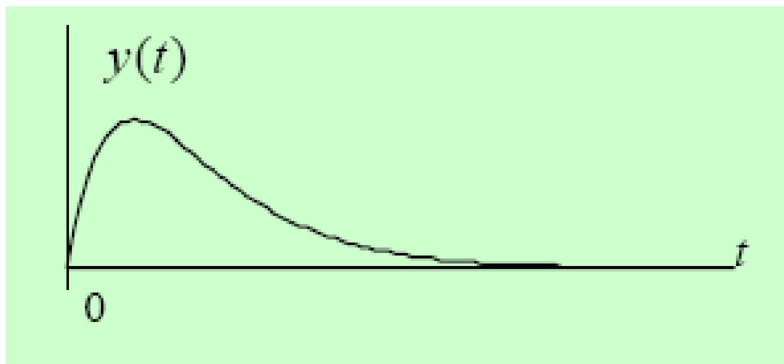


$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) = \begin{cases} AB(t\text{-}b), & b \le t \le c \\ AB(c\text{-}b), & c \le t \le a+b \\ AB(a+c\text{-}t), & a+b \le t \le a+c \end{cases}$$

Örnek: $h(t) = 2e^{-t}u(t)$ $\quad x(t) = e^{-t}u(t)$



$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t} e^{-\tau}2e^{-(t-\tau)}d\tau = 2e^{-t}\int_{0}^{t} 1 d\tau = 2te^{-t}u(t)$$



Sinyaller ve Sistemler; Ali Gangal;

Katlamanın Özellikleri:

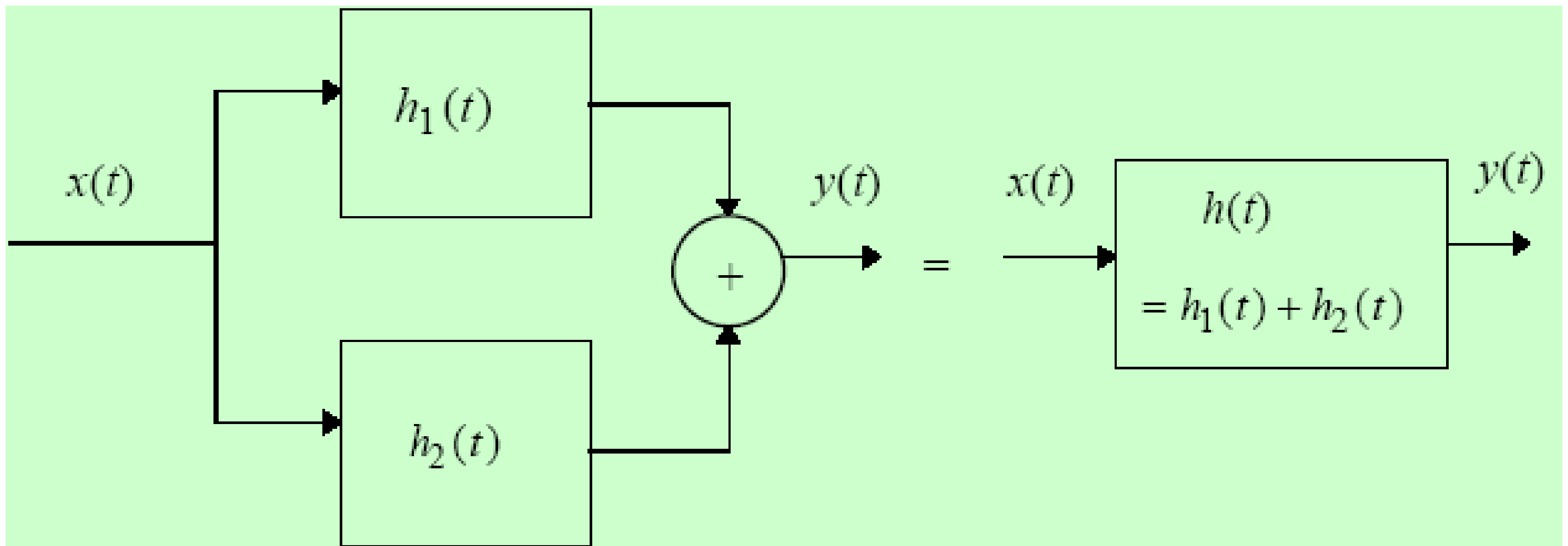
Yer değiştirme özelliği

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) h(\tau) d\tau$$

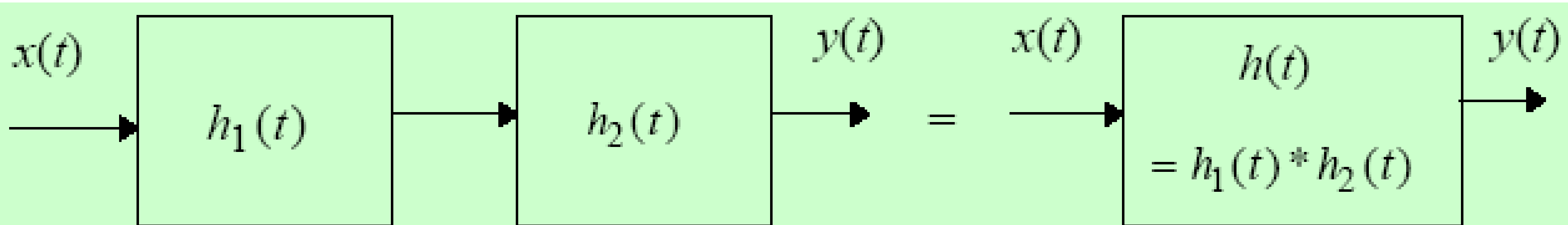
Dağılım Özelliği

$$x(t)*\left[h_1(t)+h_2(t)\right]=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)$$



Birleşim Özelliği

$$x(t) * \left[h_1(t) * h_2(t) \right] = \left[x(t) * h_1(t) \right] * h_2(t)$$



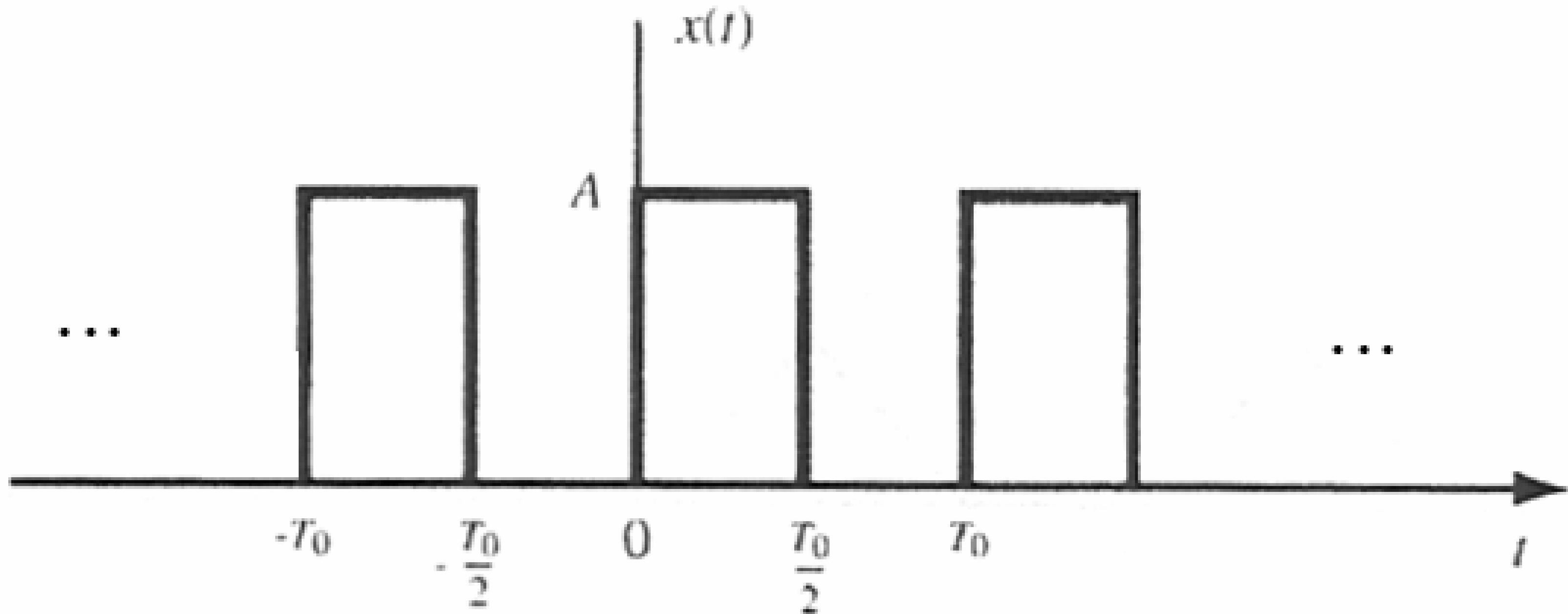
Periyodik Katlama:

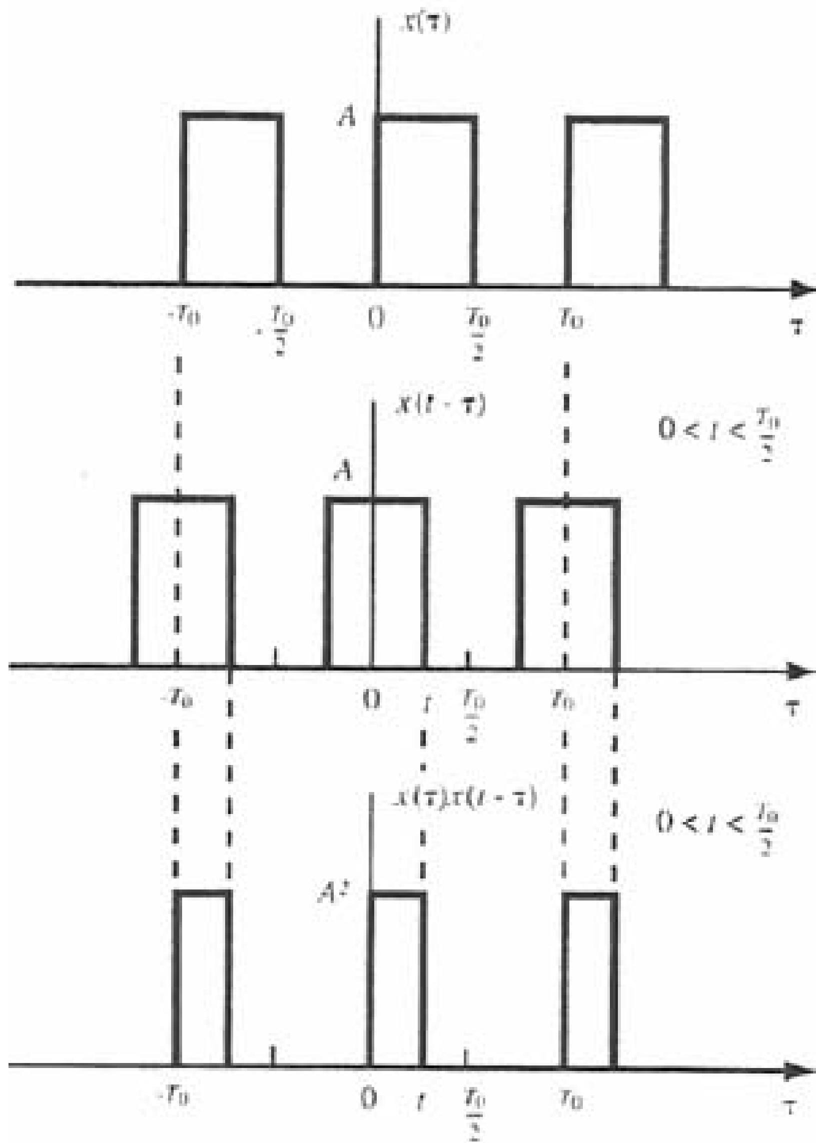
$x_1(t)$ ve $x_2(t)$ortak periyotları T_0 olan birer periyodik sinyal ise $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ nin katlaması yakınsaklaşmaz. Bu durumda $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ nin periyodik katlaması şöyle tanımlanır:

$$f(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{o}^{T_0} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau$$

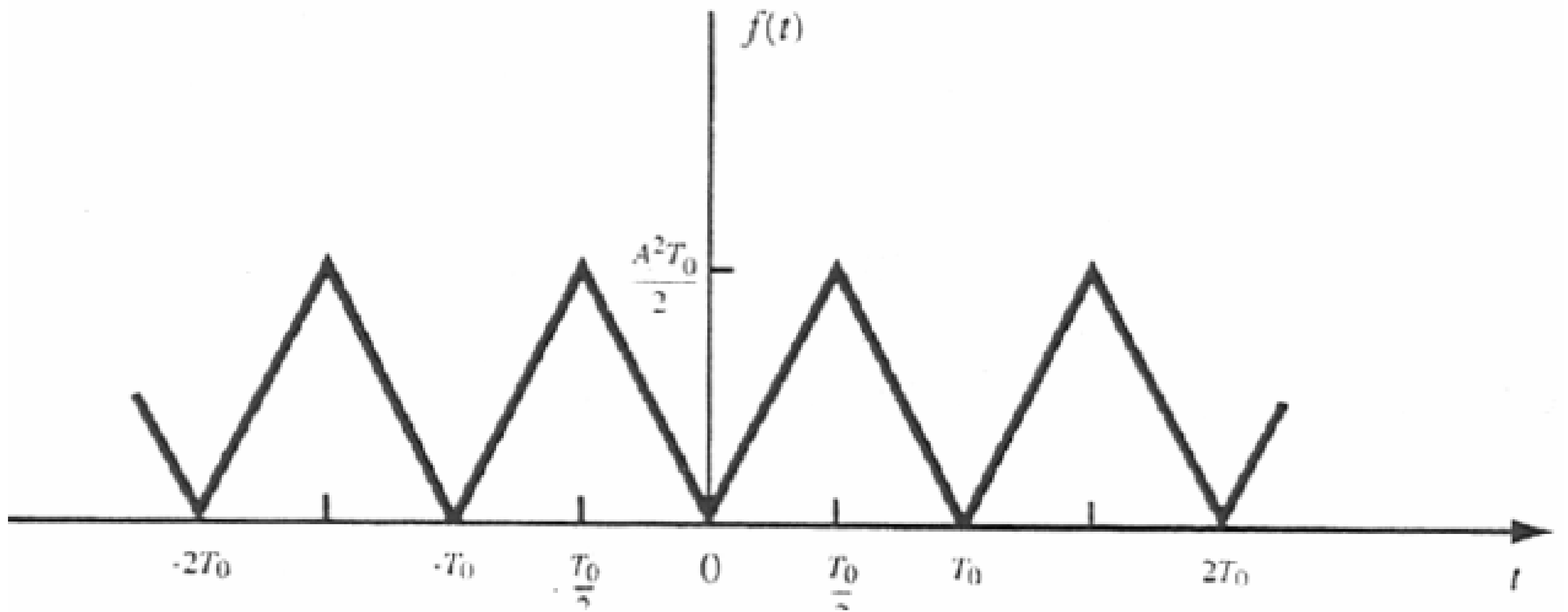
$f(t)$ de periyodik olup periyodu T_0 dır.

Örnek: $x(t)*x(t)=?$




x(τ)
A
-T0
-T0/2
0
T0/2
T0
τ
x(t - τ)
A
0 < t < T0/2
-T0
0
t
T0/2
T0
τ
x(τ)x(t - τ)
A²
0 < t < T0/2
-T0
0
t
T0/2
T0
τ
x(τ)
A
-T0
-T0/2
0
T0/2
T0
τ
x(t - τ)
T0/2 < t < T0
A
-T0/2
0
T0/2
t
T0
τ
x(τ)x(t - τ)
T0/2 < t < T0
A²
-T0/2
0
T0/2
T0
τ

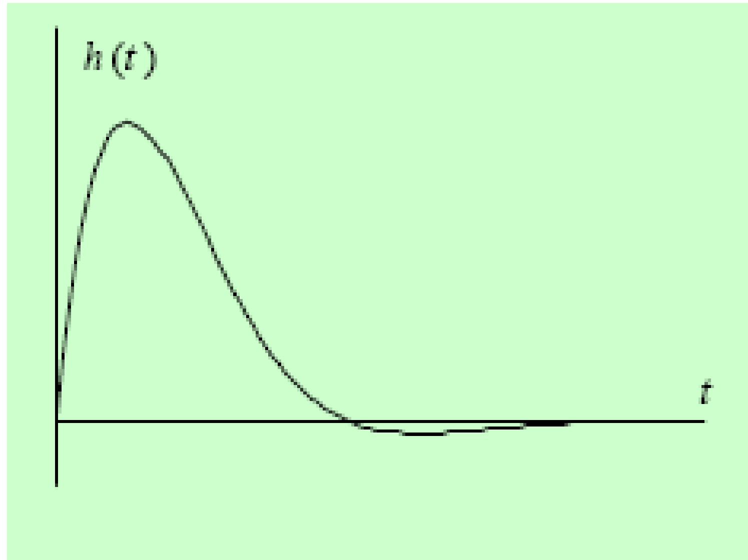
(a)

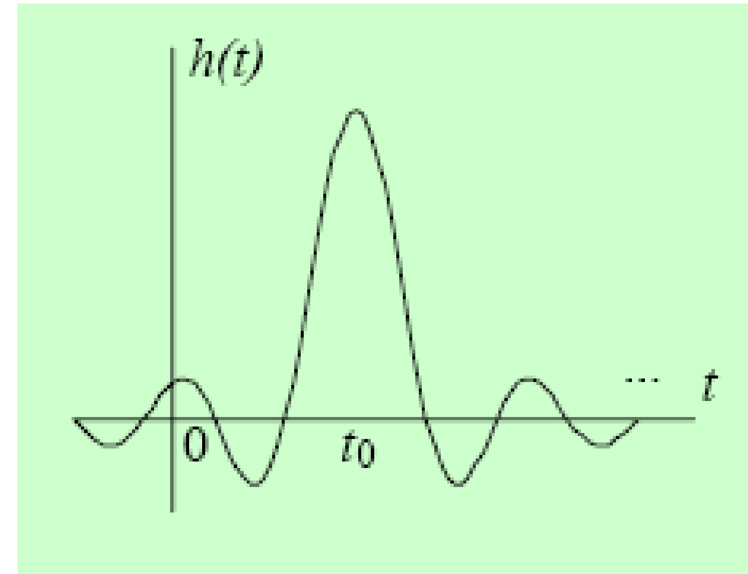


$$f(t)=\begin{cases} A^2 t & , \quad 0 < t \le T_0/2 \\ -A^2(t-T_0) & , \quad T_0/2 < t \le T_0 \end{cases}$$

$$f(t+T_0)=f(t)$$

Nedensellik





Nedensel bir sistemin birim vuruş tepkesi t<0 için sıfır olmalıdır.

Kararlılık (sınırlı giriş-sınırlı çıkış kararlılığı)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| < \infty$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$



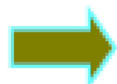
$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \right|$$



$$|y(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)h(t-\tau)| d\tau$$



$$|y(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)h(t-\tau)| d\tau$$



$$|y(t)| \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |h(t-\tau)| d\tau$$

Ayrık Zamalı DZD Sistemler

$$c_1 \frac{dy(t)}{dt} + c_0 y(t) = x(t) \qquad y(o) = y_o$$

$$c_1 \frac{dy(nT_ö)}{dt} + c_0 y(nT_ö) = x(nT_ö)$$

$$\frac{dy(nT_ö)}{dt} \cong \frac{y(nT_{ö+} T_ö) - y(nT_ö)}{T_ö}$$

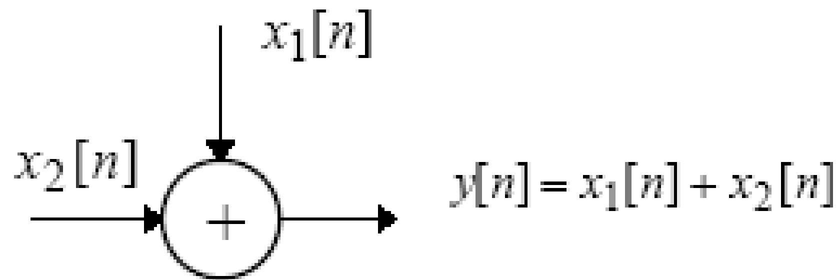
$$y((n+1)T_ö) + \frac{T_ö c_0 - c_1}{c_1} y(nT_ö) = \frac{T_ö}{c_1} x(nT_ö)$$

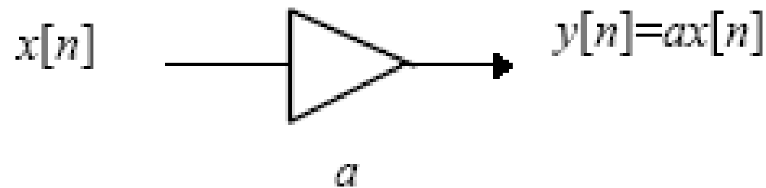
$$a_1 = \frac{T_{ö} c_o - c_1}{c_1} \qquad b_1 = \frac{T_{ö}}{c_1}$$

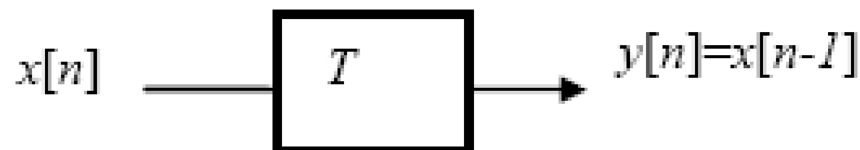
$$y[n+1] + a_1 y[n] = b_1 x[n]$$

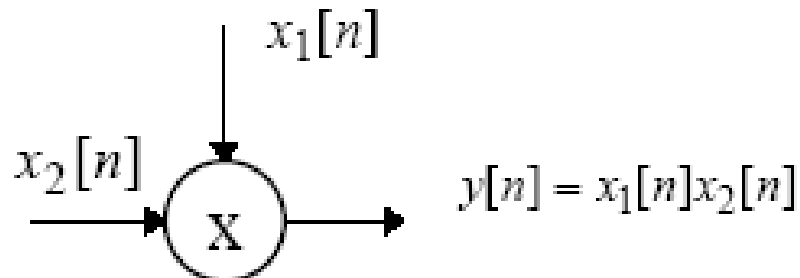
$$y[n] + a_1 y[n-1] = b_1 x[n-1]$$

$$y[o] = y_o$$


$x_1[n]$
$x_2[n]$
+
$y[n] = x_1[n] + x_2[n]$


$x[n]$
$y[n]=ax[n]$
a


$x[n]$
T
$y[n]=x[n-1]$


$x_1[n]$
$x_2[n]$
X
$y[n] = x_1[n]x_2[n]$

Fark Denklemi modeli

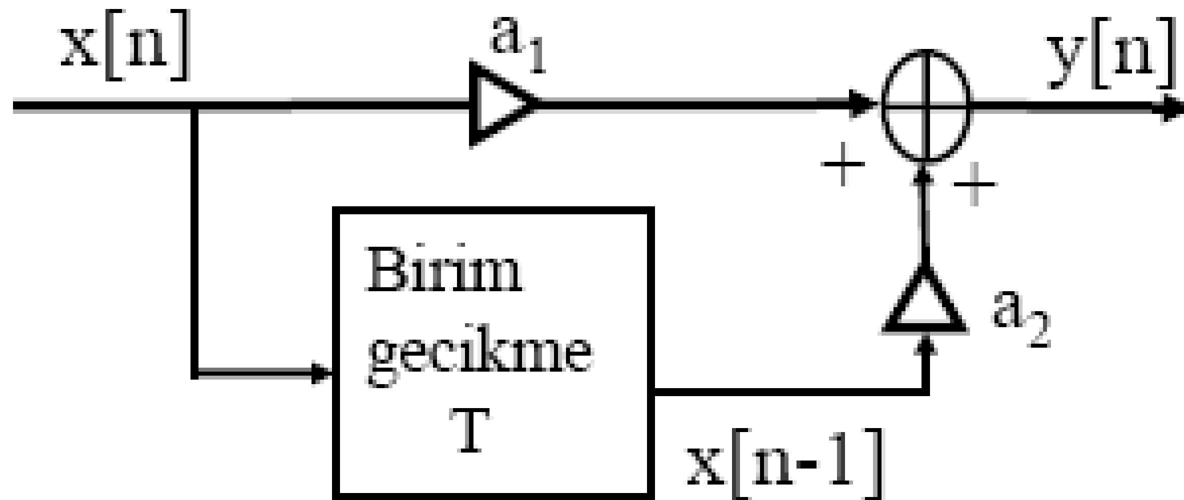
$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

Tekrarlı çözüm:

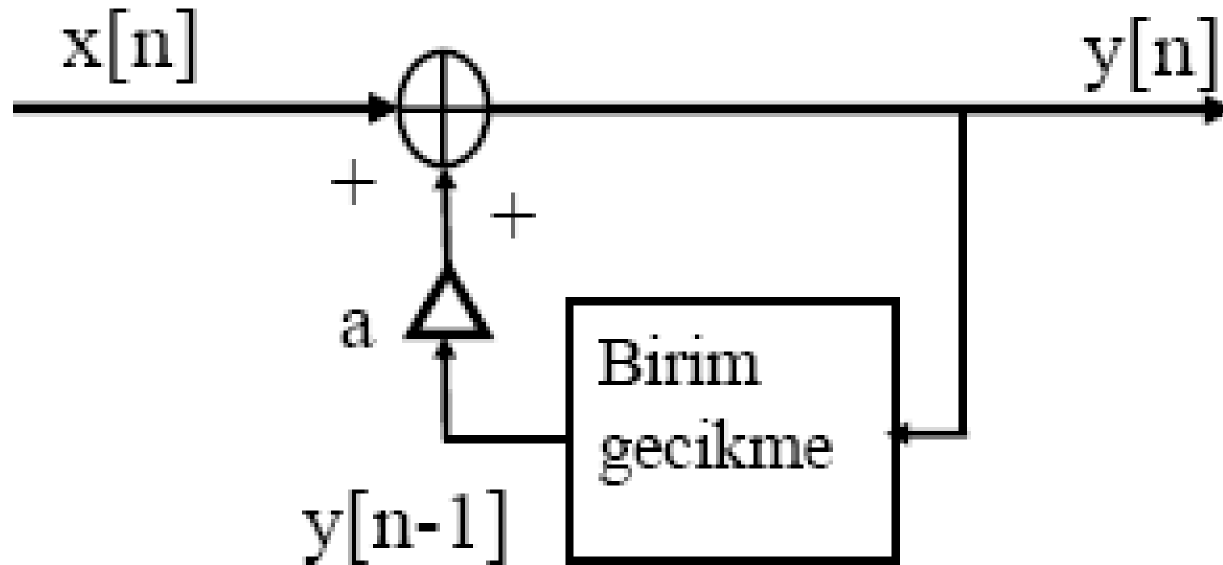
$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left[\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right]$$

$n = n_0$ dan başlayarak $y[n]$ yi hesaplamak için $n \geq n_0$ için $x[n]$ girişine ek olarak $y[n_0-1], y[n_0-2], \ldots, y[n_0-N]$ değerleri de bilinmelidir.

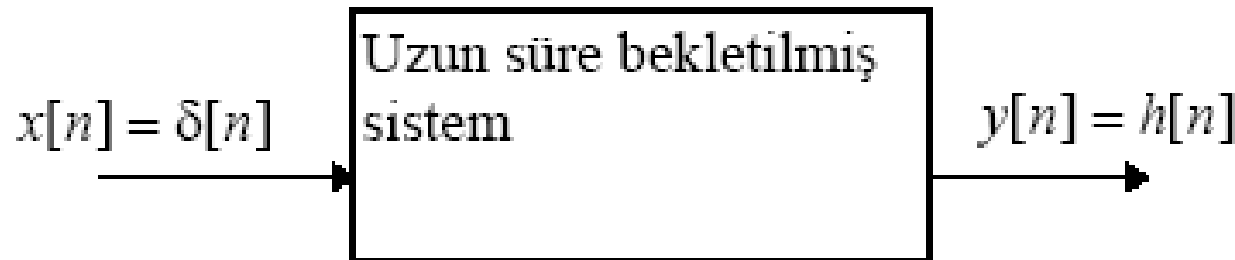
Transversal sistem



Geri beslemeli (Rekursif) sistem



Birim Örnek Tepkesi Modeli



$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Örnek:

$$x[n] = 3\delta[n] + \delta[n-1] + 2\delta[n-2] - \delta[n-3]$$

$$h[n] = 3\delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$$

$$y[n] = 9\delta[n] + 9\delta[n-1] + 11\delta[n-2] + 2\delta[n-3] - \delta[n-5]$$

Birim Örnek Tepkesinin fark denklemi modelinden elde edilmesi

$$h[n] = \frac{1}{a_0}\left[\sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k h[n-k]\right]$$

Ayrık Periyodik Katlama:

$x_1[n]$ ve $x_2[n]$ ortak periyotları N olan birer periyodik sinyal ise $x_1[n]$ ve $x_2[n]$ nin katlaması yakınsaklaşmaz. Bu durumda $x_1[n]$ ve $x_2[n]$ nin periyodik katlaması şöyle tanımlanır:

$$f[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x_1[k] x_2[n-k]$$

f[n] de periyodik olup periyodu N dir.

Örnek:

$$y[n] = x_1[n] * x_2[n] = \mathrm{Cos}\,\frac{\pi}{2}n * \mathrm{Cos}\,\frac{\pi}{2}n = ?$$

N=4

$$x_1[n] = \ldots,1,0,-1,0,1,0,-1,0,\ldots$$

$$x_2[n] = \ldots,1,0,-1,0,1,0,-1,0,\ldots$$

$$y[n] = \ldots,0,0,-2,0,0,0,-2,0,\ldots$$

Ayrık Zamanlı DZD sistemlerin Özellikleri

Bellekli, belleksiz sistemler

$$y[n] = Kx[n]$$

$$h[n] = K\delta[n]$$

$$n_0 \neq 0 \quad icin \quad h[n_0] \neq 0$$

ise ayrık zamanlı DZD sistem belleklidir.

Nedensellik:

$$h[n] = 0 \quad , \quad n < 0$$

Nedensellik:

$$h[n] = 0 \quad , \quad n < 0$$

Nedensel bir x[n] girişi için nedensel, ayrık zamanlı DZD bir sistemin y[n] çıkışı:

$$\sum_{k=0}^{n} h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{n} x[k]h[n-k]$$

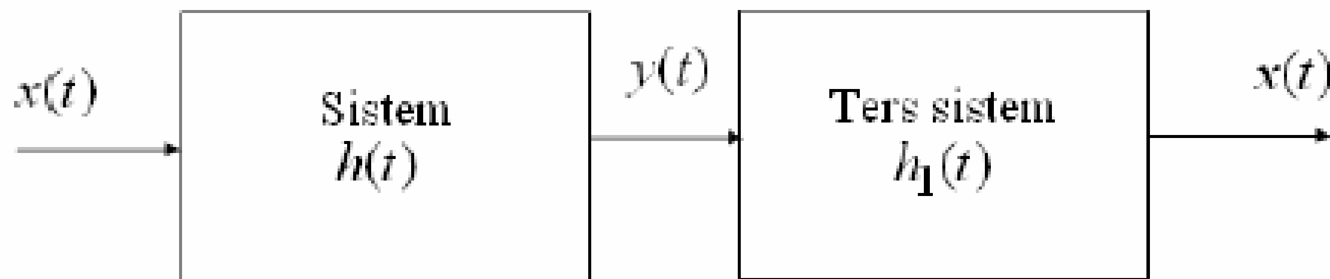
Kararlılık (sınırlı giriş-sınırlı çıkış kararlılığı)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| h[k] \right| < \infty$$

Finite Impulse Response (FIR)-
Infinite Impulse Response(IIR) sistemler

Bir sistemin birim vuruş (veya birim örnek) tepkesi sonsuz terim içeriyorsa IIR sistem, sonlu terim içeriyorsa FIR sistemdir (genellikle geribesleme yoktur). Geribeslemeli (recursive) sistemler genellikle IIR sistemlerdir. Ancak her geribeslemeli sistem IIR değildir.

Tersi alınabilir sistem: Bir sistemin çıkış sinyali $y(t)$ kullanılarak girişi için tek bir $x(t)$ bulunabiliyorsa, sistem tersi alınabilir sistemdir.



$$h(t) * h_1(t) = \delta(t)$$

Bu tanım, ayrık sistemler için de geçerlidir.

$$h[n] * h_1[n] = \delta[n]$$

Örnek: $y(t) = x(t - t_0)$ ise bu sistem tersi alınabilirmidir? Eğer tersi alınabilir sistem ise ters sistemin birim vuruş tepkesi ne olmalıdır?

$$h(t) = \delta(t - t_0)$$

$$x(t - t_0) = x(t) * \delta(t - t_0)$$

$h_1(t) = \delta(t + t_0)$ seçilirse $h(t) * h_1(t) = \delta(t)$ olur.

Yani ters sistemin birim vuruş tepkesi $h_1(t) = \delta(t + t_0)$ dir.

Örnekler:

$$y(t) = 2x(t) \rightarrow x(t) = \frac{1}{2}y(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \rightarrow x(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

$y(t) = x^2(t)$ (tersi alınamaz)

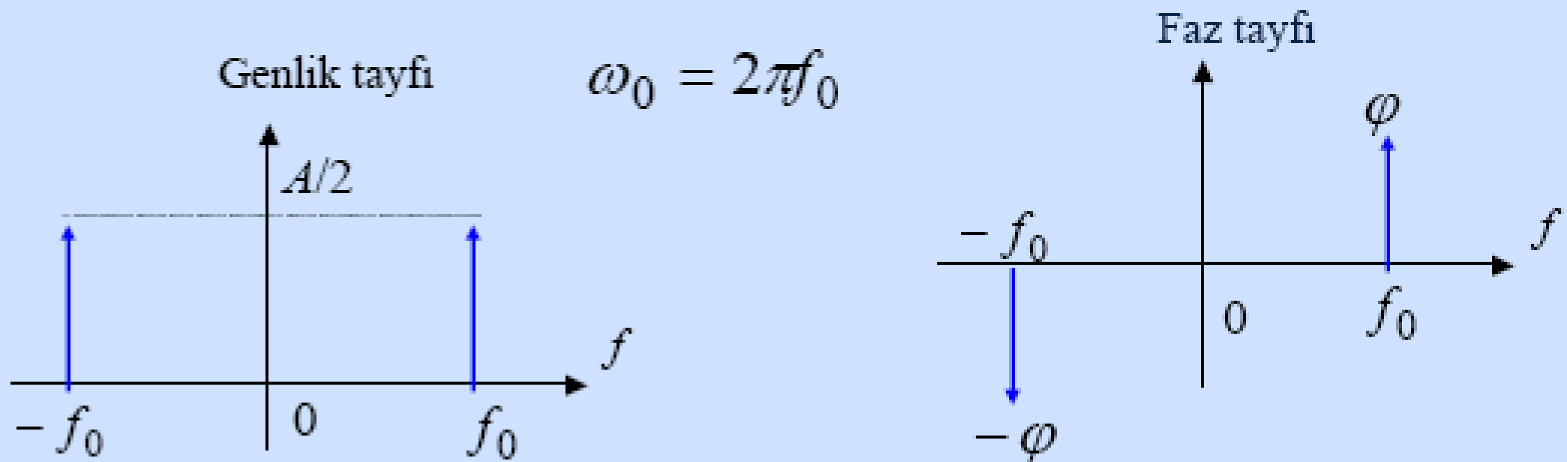
$y[n] = nx[n]$ (tersi alınamaz)

DZD Sistemlerin Frekans Domeni Modelleri

- Tayf Kavramı

Euler açılımı kullanılarak iki yanlı tayf gösterimi yapılabilir:

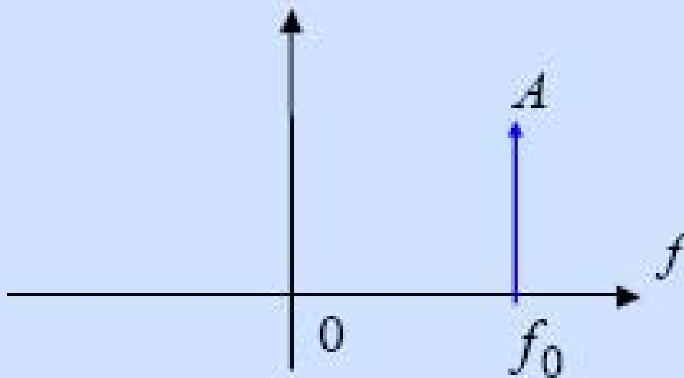
$$A\cos(\omega_0 t + \varphi) = \frac{A}{2}e^{j(\omega_0 t+\varphi)} + \frac{A}{2}e^{-j(\omega_0 t+\varphi)}$$

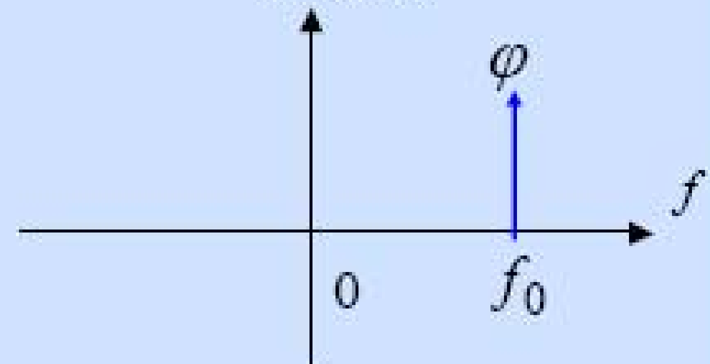


Tek yanlı tayf gösterimi de yapılabilir:

$A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\omega_0 = 2\pi f_0$



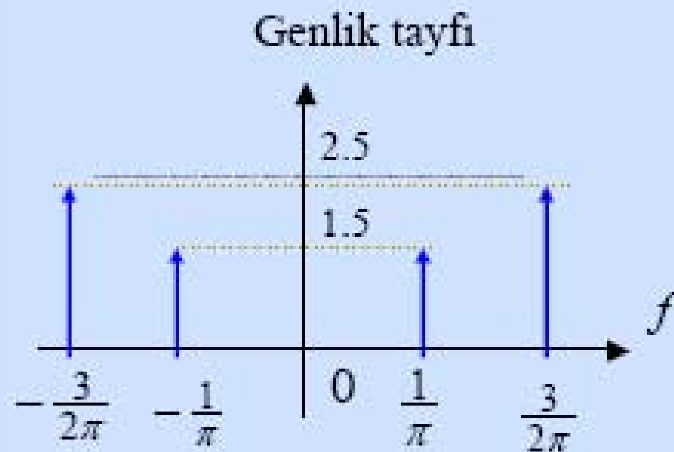


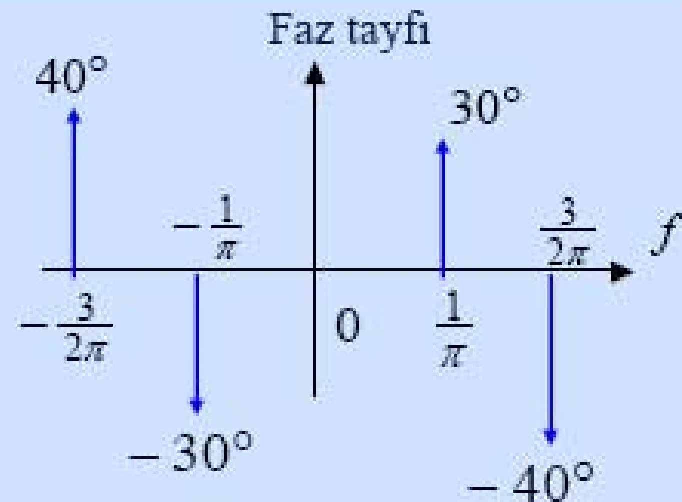
Örnek 3.1

$$x(t) = 5Sin(3t + 50°) + 3Cos(2t + 30°)$$

$$x(t) = 5\ \frac{e^{j(3t+50°)} - e^{-j(3t+50°)}}{2j} + 3\ \frac{e^{j(2t+30°)} + e^{-j(2t+30°)}}{2}$$

$$x(t) = 2.5\ e^{j(3t-40°)} + 2.5\ e^{-j(3t-40°)} + 1.5\ e^{j(2t+30°)} + 1.5\ e^{-j(2t+30°)}$$





Trigonometrik Fourier Serileri

$$f(t) = f(t + T_0)$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t \right); \quad \omega_0 = 2\pi / T_0$$

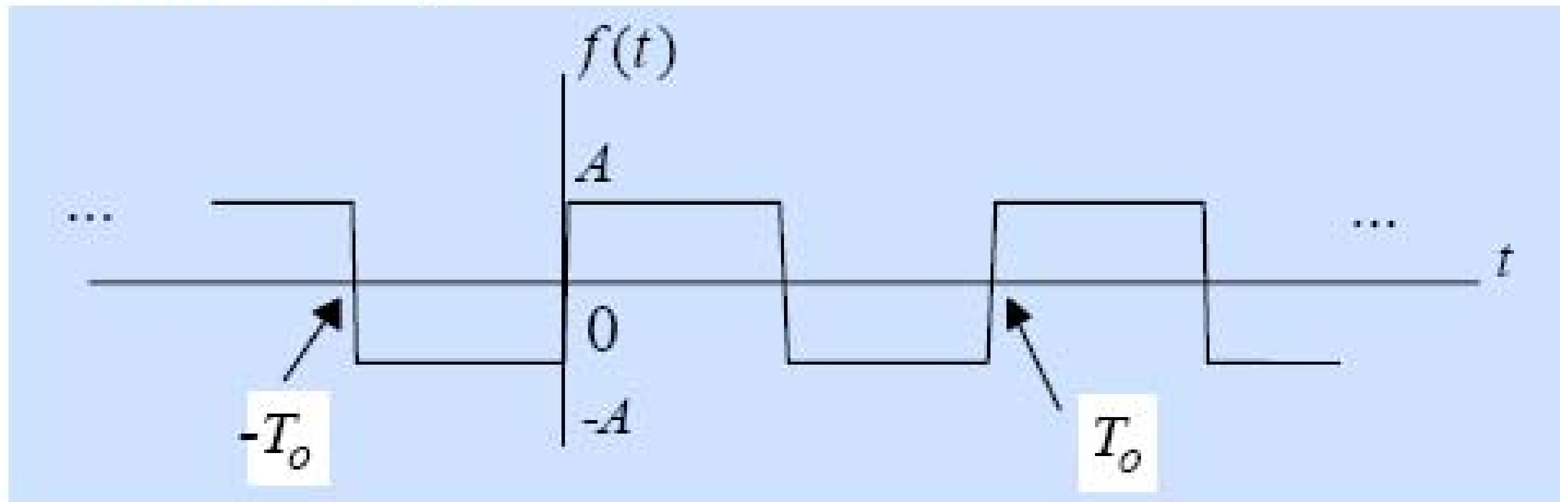
$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{a_k^2 + b_k^2} \cos(k\omega_0 t + \phi_k) \right); \quad \phi_k = \arctan \frac{-b_k}{a_k}$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \cos k\omega_0 t dt; \quad k = 1,2,3,\ldots.$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \sin k\omega_0 t dt; \quad k = 1,2,3,\ldots.$$

Örnek 3.2



$$a_0 = 0$$

$$a_k = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)Cos\, k\omega_o t dt = 0$$

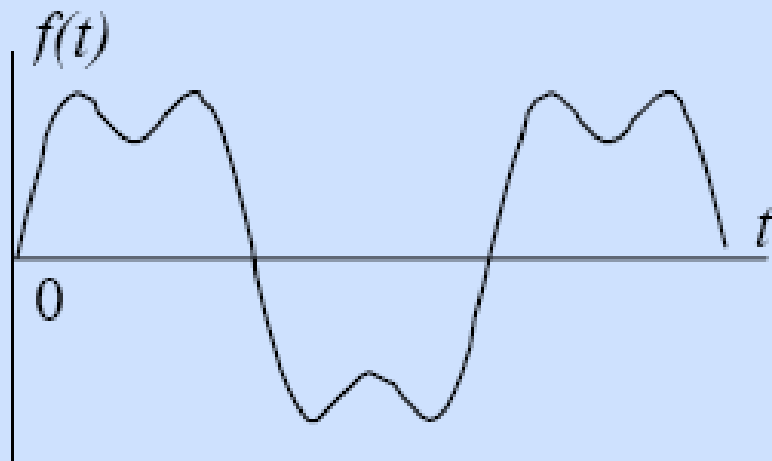
$$b_k = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)Sink\omega_o t dt = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{0} -ASink\omega_o t dt + \frac{2}{T_0}\int_{0}^{T_0/2} ASink\omega_o t dt$$

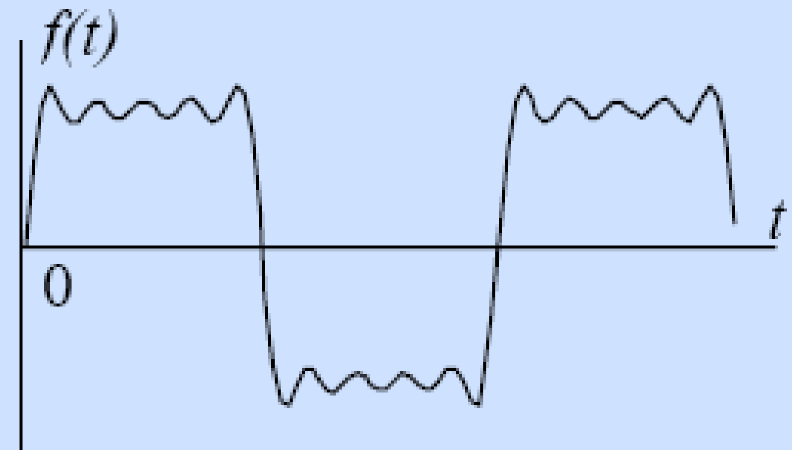
$$b_k = \frac{A}{k\omega_o}\frac{2}{T_0}\left[Cosk\omega_o t\right]\Big|_{-T_0/2}^{0} - \frac{A}{k\omega_o}\frac{2}{T_0}\left[Cosk\omega_o t\right]\Big|_{0}^{T_0/2}$$

$$= \frac{2A}{k\pi}(1 - Cosk\pi)$$

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2A}{k\pi}(1 - \cos k\pi) Sin(k\omega_o t)$$

$$f(t) = \frac{4A}{\pi}\left(Sin\omega_o t + \frac{1}{3}Sin3\omega_o t + \frac{1}{5}Sin5\omega_o t + \frac{1}{7}Sin7\omega_o t + \ldots\right)$$







Gibbs olayı

• Üstel Fourier Serileri

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_0 t} \qquad F_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Üstel Fourier serisi katsayıları aşağıdaki gibi de yazılabilir:

$$F_k = F_g + jF_s = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) Cos(k\omega_o t) dt - j \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) Sin(k\omega_o t) dt$$

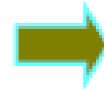
Trigonometrik Fourier serisi formülünde aşağıdaki ifadeler yerine yazılırsa:

$$Cos k\omega_0 t = \frac{1}{2}\left(e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}\right) \qquad Sin k\omega_0 t = \frac{1}{2j}\left(e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}\right)$$

$$f(t) = a_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[e^{jk\omega_0 t}(a_k - jb_k) + e^{-jk\omega_0 t}(a_k + jb_k) \right]$$

elde edilir.

$$a_k = a_{-k} \quad \text{ve} \quad b_k = -b_{-k}$$



$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}(a_k - jb_k)e^{jk\omega_0 t}$$

$$F_k = \frac{1}{2}\left(a_k - jb_k\right)$$

$$F_k^* = \frac{1}{2}\left(a_k + jb_k\right)$$

$$F_k^* = F_{-k}$$

$$a_k = F_k + F_{-k} = 2\ \mathrm{Re}\left\{F_k\right\}$$

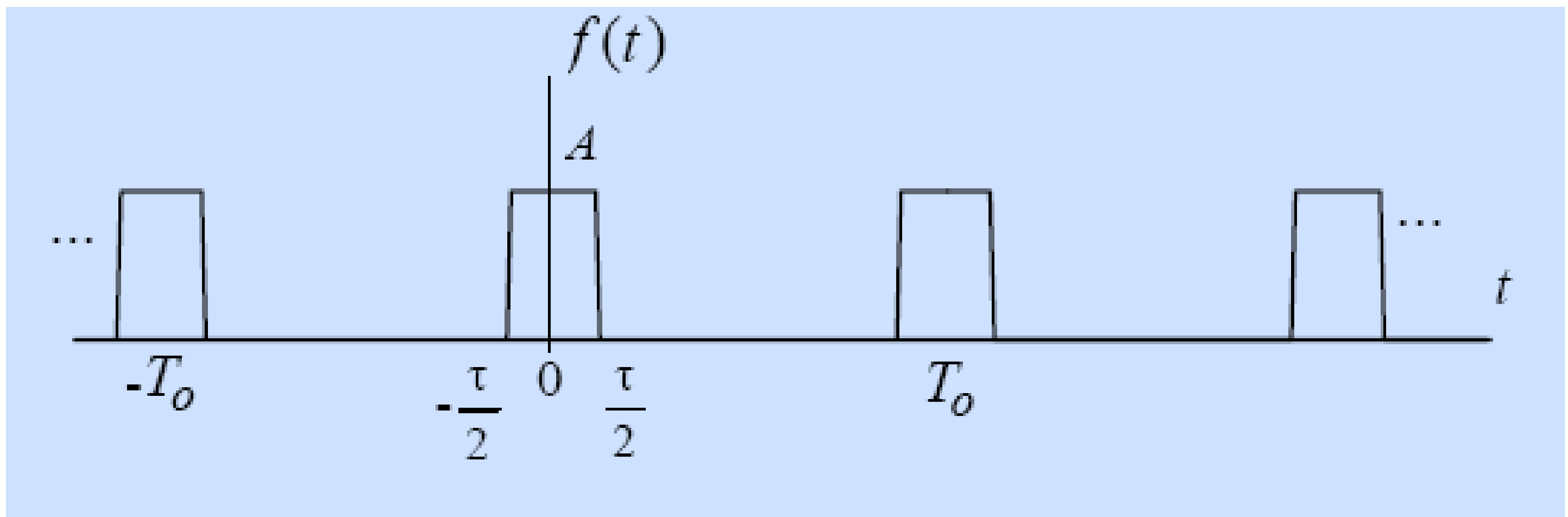
$$b_k = j\left(F_k - F_{-k}\right) = -2\,\mathrm{Im}\left\{F_k\right\}$$

$$F_k = |F_k| e^{j\angle F_k}$$

$$|F_k| = \frac{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}{2}$$

$$\angle F_k = \phi_k = \tan^{-1}\left(\frac{-b_k}{a_k}\right)$$

Örnek:

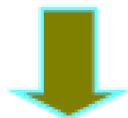


$$F_k=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T_0}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} Ae^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{A}{-jk\omega_0 T_0}\left[e^{-jk\omega_0 t}\right]\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2}$$

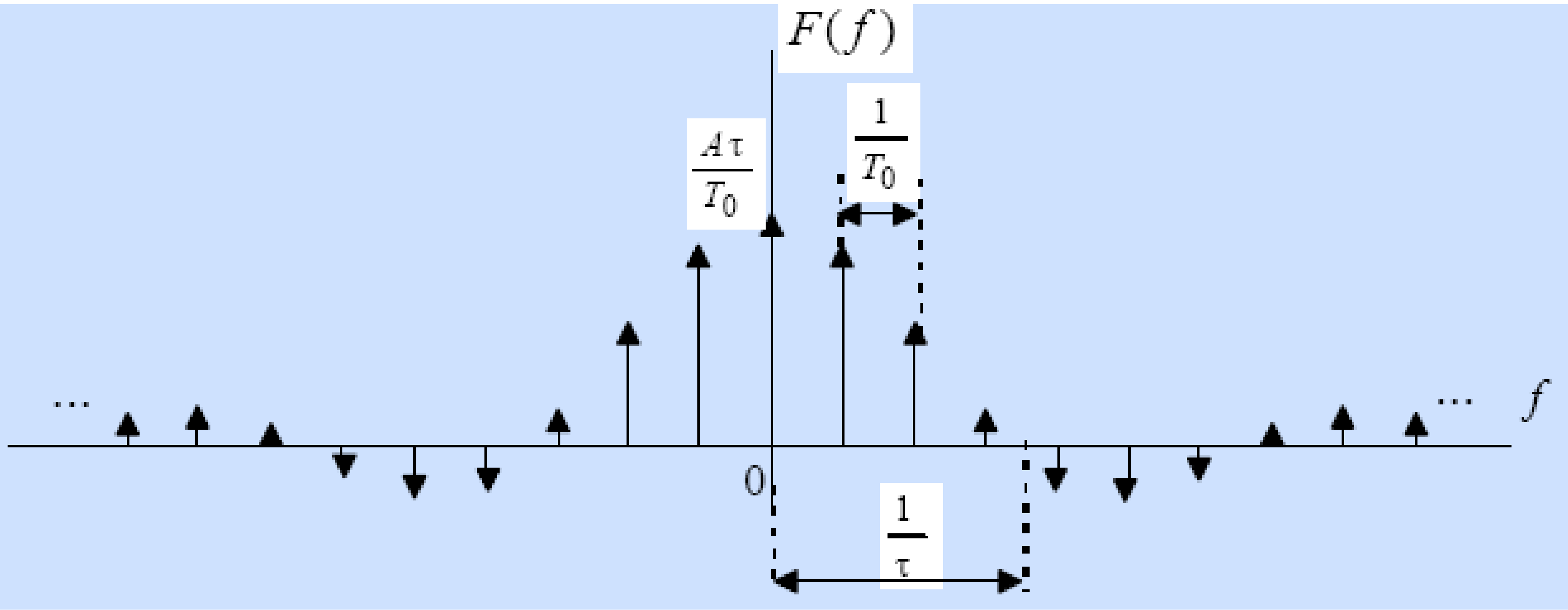
$$=\frac{A}{-jk\omega_0 T_0}\left[e^{-jk\omega_0\tau/2}-e^{jk\omega_0\tau/2}\right]=\frac{A}{-jk\omega_0 T_0}\left[-2jSin(k\omega_0\tau/2)\right]=\frac{ASin\pi kf_0\tau}{\pi k}$$

$$F_k=\frac{A\tau}{T_0}Sinc(kf_0\tau)$$

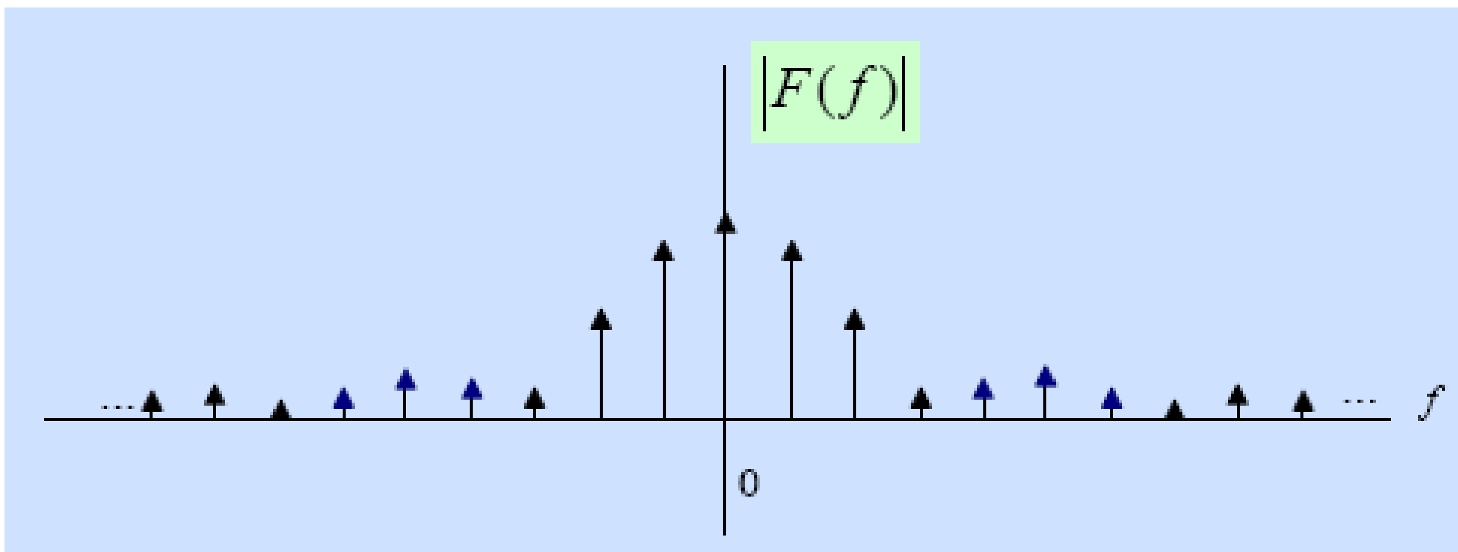
$$f(t)=\frac{A\tau}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}Sinc(kf_0\tau)e^{jk\omega_0 t}$$



$$F(f)=\frac{A\tau}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}Sinc(kf_0\tau)\delta(f-kf_0)$$



$F(f)$
$\frac{A\tau}{T_0}$
$\frac{1}{T_0}$
...
...
f
0
$\frac{1}{\tau}$


$|F(f)|$
...
0
f

$\angle F(f)$
...
0
f

•Fourier serisinin özellikleri

1) Doğrusallık özelliği

$$f(t) \leftrightarrow F_k$$

$$g(t) \leftrightarrow G_k$$

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \leftrightarrow \alpha F_k + \beta G_k$$

2) Dikgenlik özelliği:

$$\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)g^*(t)dt \leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k G_k$$

$f(t) = g(t)$ ise

$$\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |f(t)|^2 dt \leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |F_k|^2$$

Parseval Teoremi

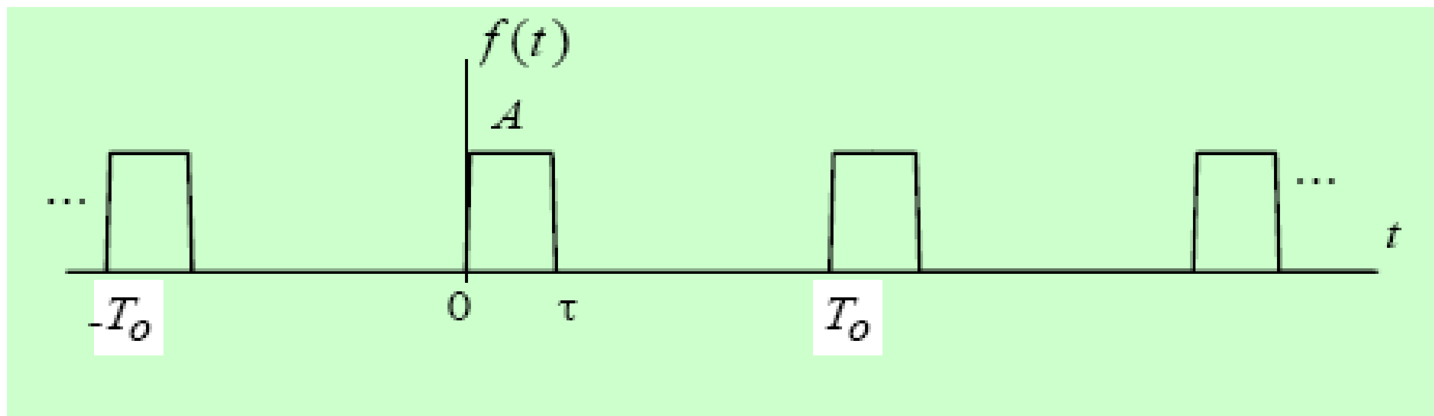
3) Kayma Özellikleri:

a) Zamanda kayma özelliği

$$f(t) \leftrightarrow F_k$$

$$f(t-\tau) \leftrightarrow e^{-jk\omega_0\tau} F_k$$

Örnek:



$$F_k = \frac{A\tau}{T_0} Sinc(kf_0\tau) e^{-jk\omega_0\tau/2}$$

b) Zamanda katlama özelliği

$$\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t-\tau)g(\tau)d\tau \leftrightarrow F_k G_k$$

c) Modülasyon Özelliği

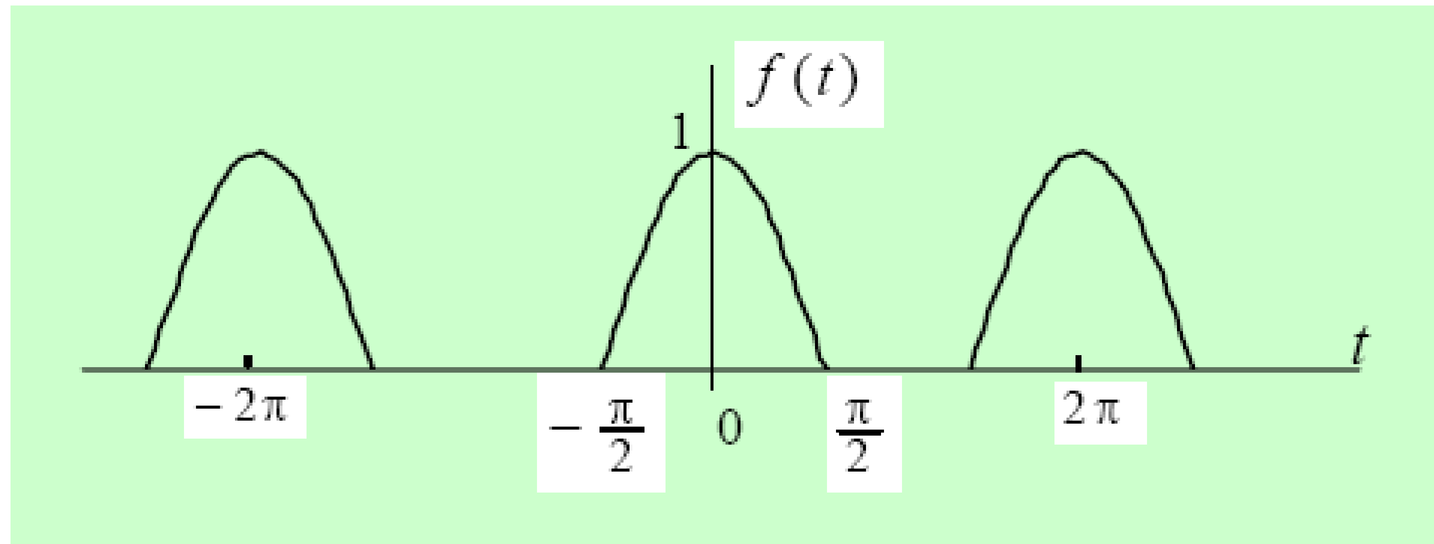
$$e^{jm\omega_o t} f(t) \leftrightarrow F_{k-m}$$

d) Zamanda çarpma özelliği

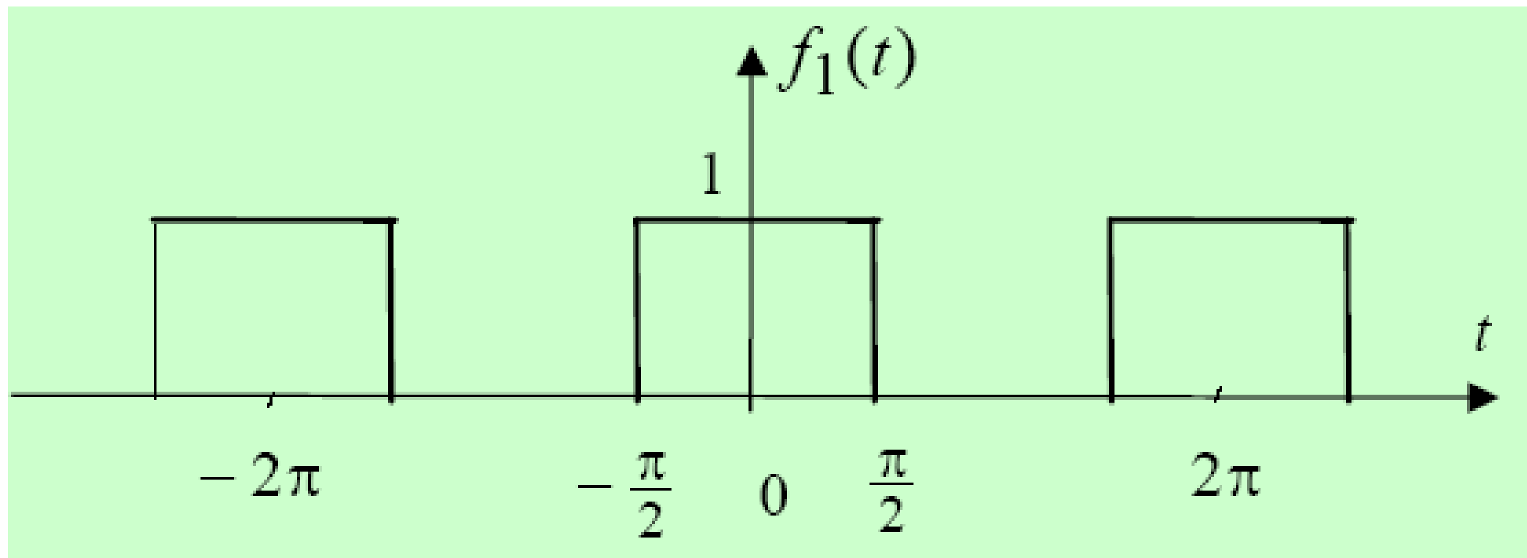
(İki işaretin periyodu eşit olmalı)

$$f(t)g(t) \leftrightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_{k-m} G_m$$

Örnek:



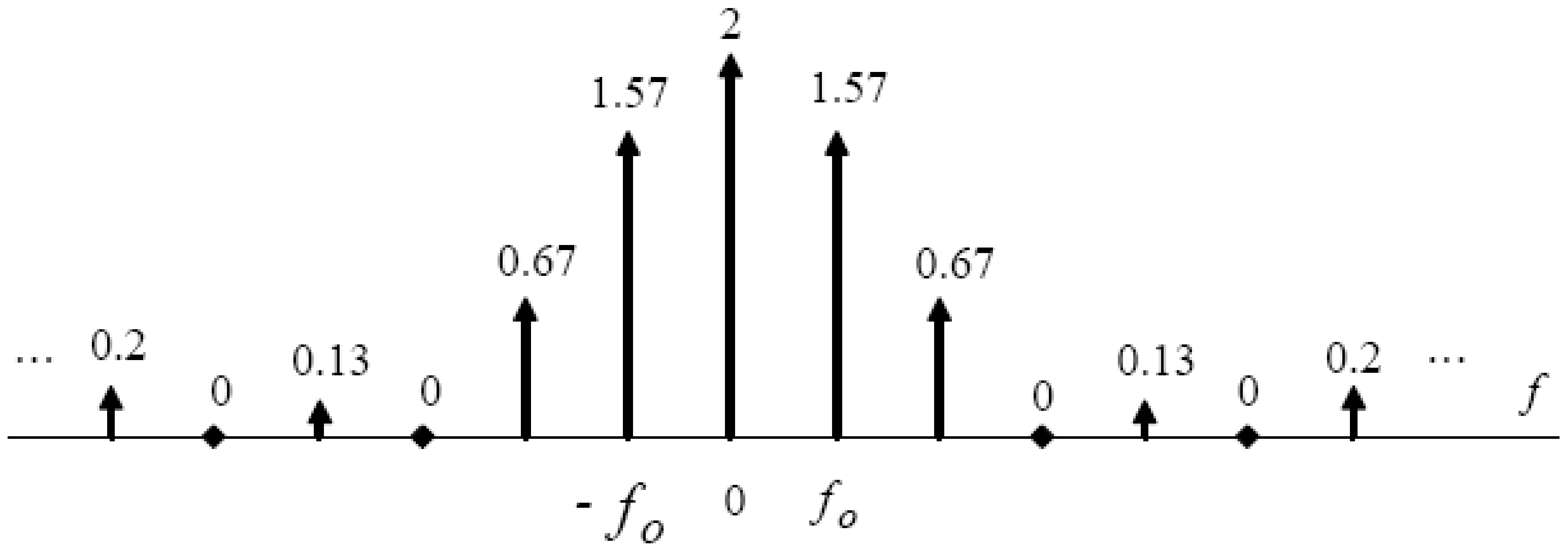
$$F_k = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{Sin\left((k-1)\frac{\pi}{2}\right)}{(k-1)} + \frac{Sin\left((k+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(k+1)} \right)$$



$$F_{1k}=\frac{1}{k\pi}Sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$f_2(t)=Cos\,t\leftrightarrow F_{2k}=\frac{1}{2}\delta(k-1)+\frac{1}{2}\delta(k+1)$$

$$F_k=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2}{k-1}Sin\left(\frac{(k-1)\pi}{2}\right)+\frac{2}{k+1}Sin\left(\frac{(k+1)\pi}{2}\right)\right)\right)$$


...
0.2
0
0.13
0
0.67
1.57
2
1.57
0.67
0
0.13
0
0.2
...
f
- f_o
0
f_o

Simetri Özellikleri

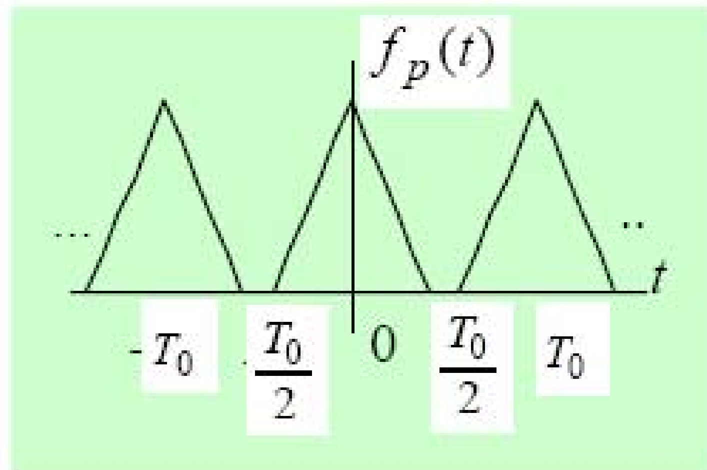
$$\mathrm{Im}[f(t)] = 0 \leftrightarrow F_{-k} = F_k^*$$

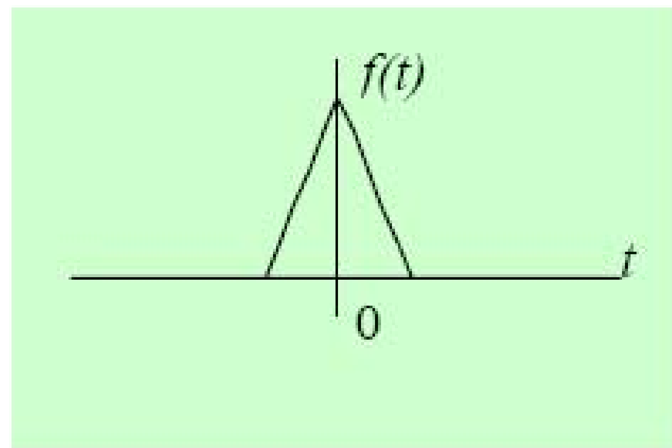
$$f(-t) = [f(t)]^* \leftrightarrow \mathrm{Im}[F_k] = 0$$

$$\mathrm{Re}[f(t)] = 0 \leftrightarrow F_{-k} = -F_k^*$$

$$f(-t) = -f(t)^* \leftrightarrow \mathrm{Re}[F_k] = 0$$

• Fourier Dönüşümü

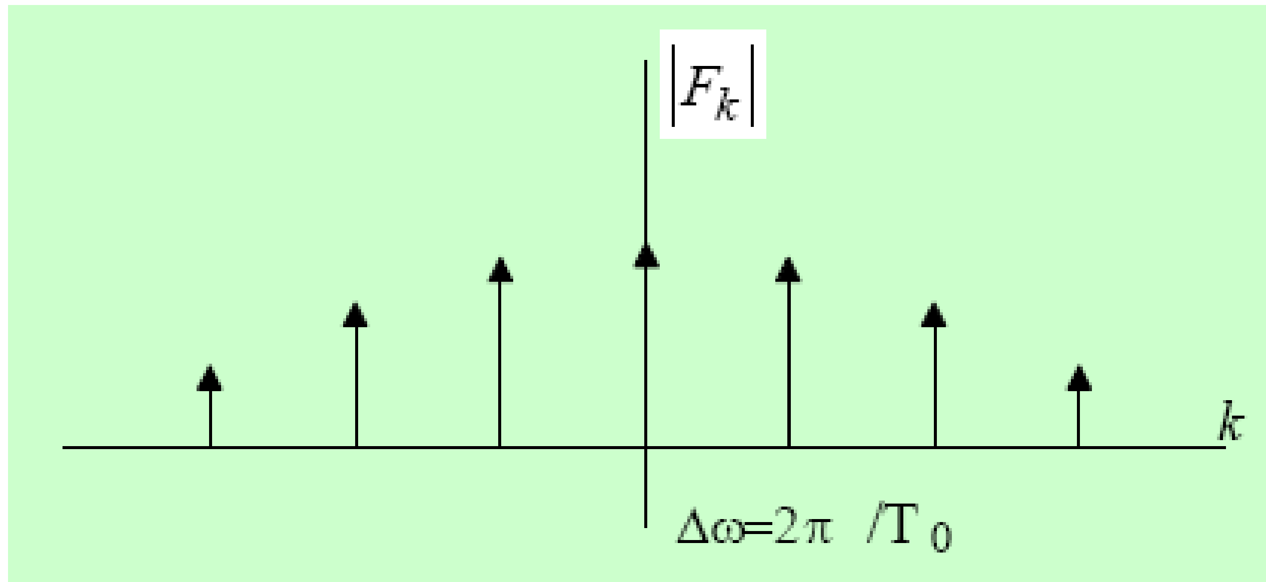




$$\lim_{T_0 \to \infty} f_p(t) = f(t)$$

$$f_p(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_o t}$$

$$F_k = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_p(t) e^{-jk\omega_o t} dt$$



$$\Delta\omega = (k+1)\omega_o - k\omega_o = \omega_o = 2\pi / T_o$$

$$f_p(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_o t} \Delta\omega$$

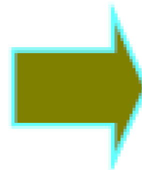
$$\omega_k \overset{\Delta}{=} k\omega_o \qquad F(\omega_k) \overset{\Delta}{=} F_k$$

$$f_p(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega_k) e^{j\omega_k t} \Delta\omega$$

$$\lim_{T_0 \to \infty} f_p(t) = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega_k) e^{j\omega_k t} \Delta\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$F(\omega_k) = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_p(t) e^{-j\omega_k t} dt$$



$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$F(\omega) = F\left(f(t)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$f(t) = \mathrm{F}^{-1}\left(F(\omega)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$F(f) = F\left(f(t)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$f(t) = \mathrm{F}^{-1}\left(F(f)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f)e^{j2\pi t}df$$

Bir işaretin Fourier dönüşümünün alınabilmesi için

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(t)\right| dt < \infty$$

Şartı sağlanmalıdır

Fourier dönüşümü ile Fourier serisi katsayıları arasındaki ilişki

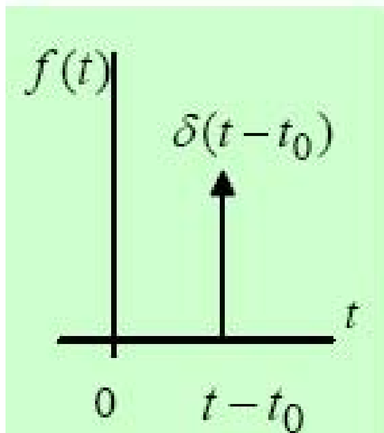
$$F_k = \frac{1}{T_0} F(\omega)\Big|_{\omega = k\,\omega_o} = \frac{1}{T_0} F(k\omega_o)$$

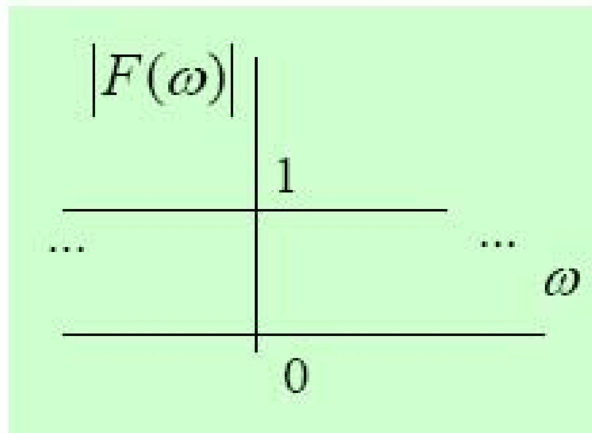
Bazı önemli fonksiyonların Fourier dönüşümleri

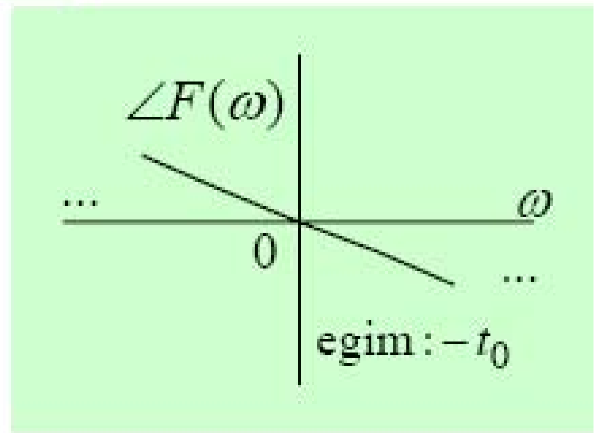
Birim vuruş işareti

$$\mathrm{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

$$\mathrm{F}\{\delta(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0}$$

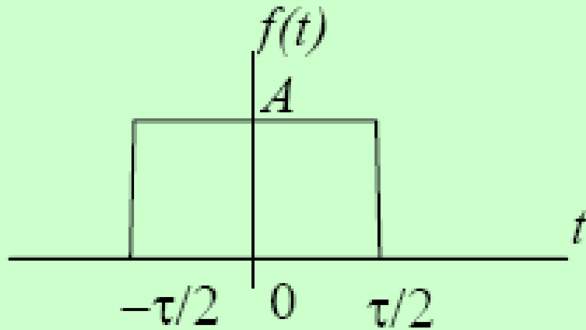






Dikdörtgen vuruş işareti

$$f(t) = A.\prod\left(\frac{t}{\tau}\right)$$



$$F(\omega) = \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} A e^{-j\omega t} dt$$

$$= A \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2}$$

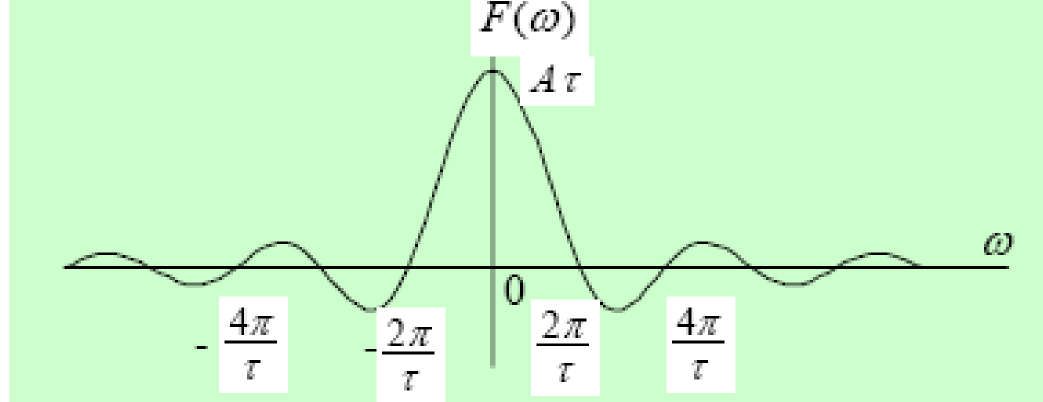
$$= \frac{A}{j\omega}\left(e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2}\right)$$

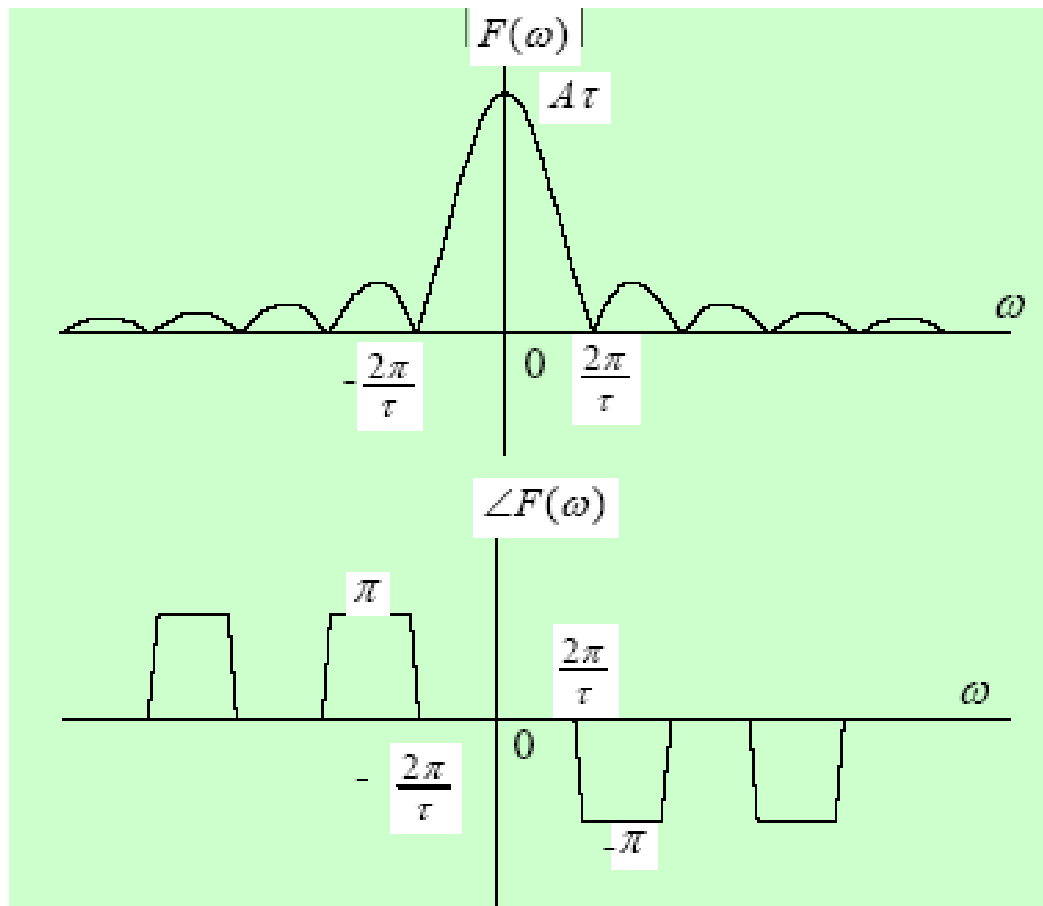
$$= A\tau \frac{Sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$$

$$Sincx = \frac{Sin\,\pi x}{\pi x}$$

$$F(\omega) = A\tau\, Sinc\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$$

$$F(f) = A\tau\, Sinc(f\tau)$$


$F(\omega)$
$A\tau$
ω
0
$-\frac{4\pi}{\tau}$
$-\frac{2\pi}{\tau}$
$\frac{2\pi}{\tau}$
$\frac{4\pi}{\tau}$


$|F(\omega)|$
$A\tau$
ω
$-\frac{2\pi}{\tau}$
0
$\frac{2\pi}{\tau}$
$\angle F(\omega)$
π
$\frac{2\pi}{\tau}$
ω
0
$-\frac{2\pi}{\tau}$
$-\pi$

Üstel Karmaşık Fonksiyon

$$x(t) = e^{\pm j\omega_0 t}$$

$$X(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

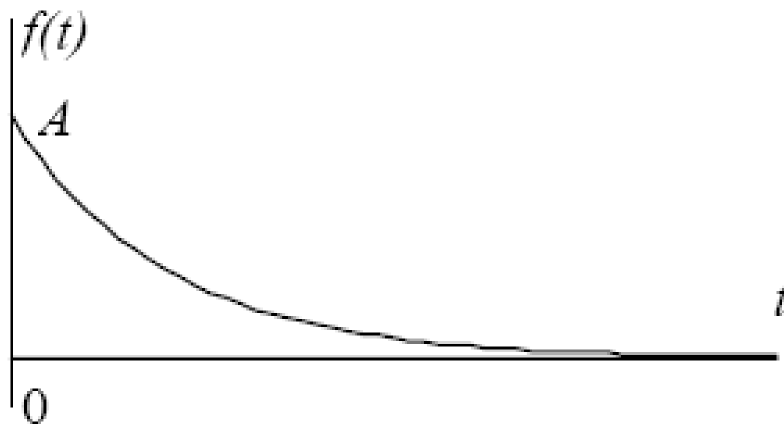
İspat:

$$F^{-1}\{2\pi\delta(\omega \mp \omega_0\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega \mp \omega_0)e^{j\omega t}d\omega = e^{\pm j\omega_0 t}$$

$$X(f) = \delta(f - f_0)$$

Tek yanlı üstel vuruş işareti

$$x(t) = Ae^{-\alpha t}u(t) \;,\quad 0 \le t \le \infty$$

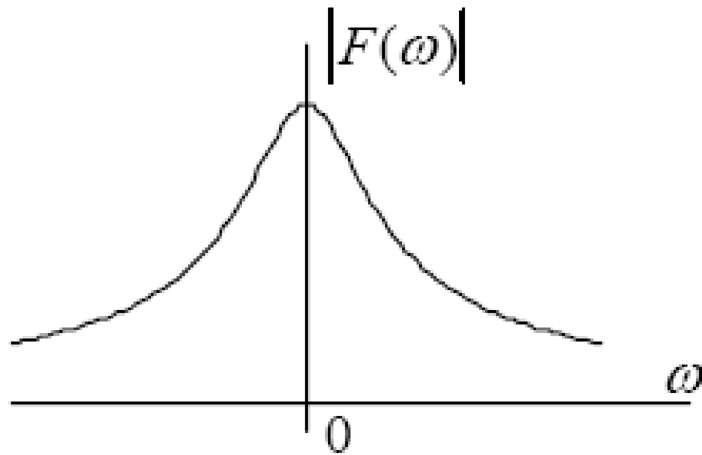


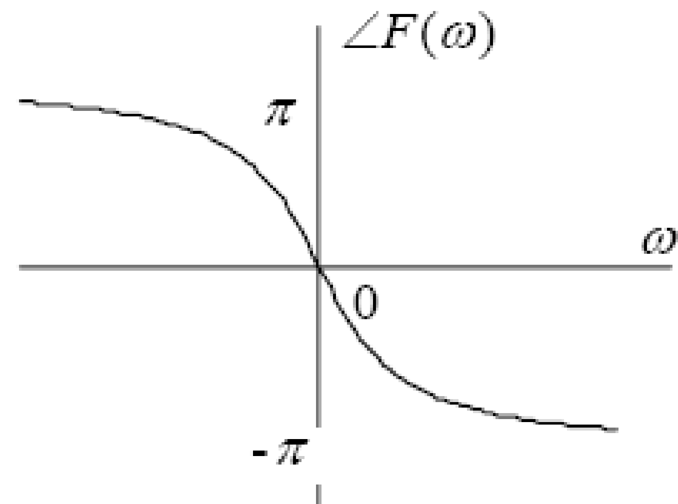
$$F\left\{Ae^{-\alpha t}u(t)\right\} = A\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t}u(t)e^{-j\omega t}dt = A\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}dt =$$

$$= \frac{A}{-j(\omega+\alpha)}e^{-j(\omega+\alpha)t}\Bigg|_{t=0}^{\infty} = \frac{A}{j\omega+\alpha}$$

$$|F(\omega)| = \frac{A}{\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}}$$

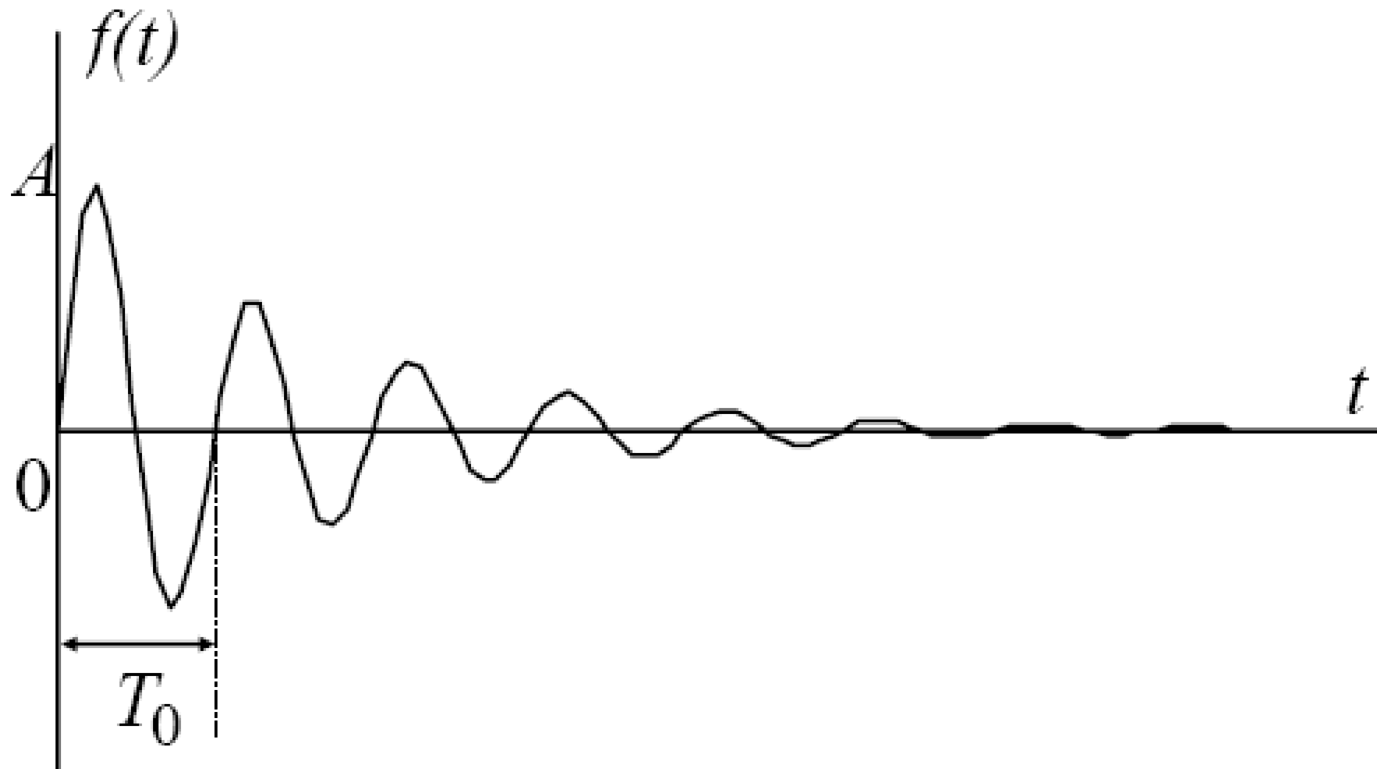
$$\angle F(\omega) = -\tan^{-1}(\omega/\alpha)$$





Sönümlü Sinüs İşareti

$$f(t) = Ae^{-\alpha t} \sin \omega_o t.u(t)$$



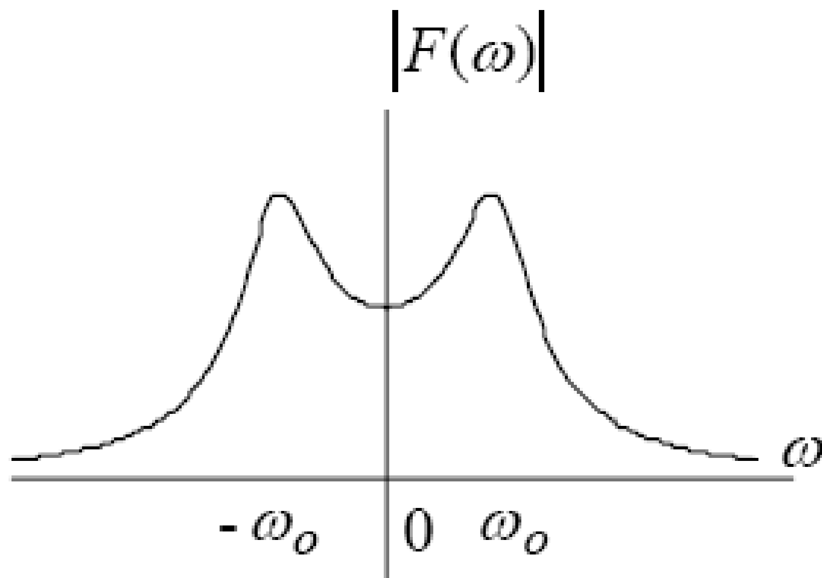
$$F\left\{Ae^{-\alpha t}\sin\omega_o t.u(t)\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}Ae^{-\alpha t}\sin\omega_o t.u(t)e^{-j\omega t}dt$$

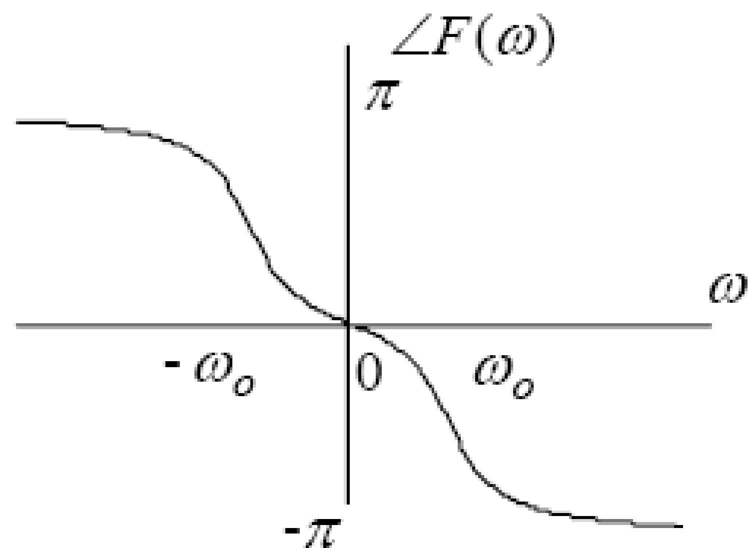
$$=A\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha t}\frac{e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}}{2j}e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{A}{2j}\int_{0}^{\infty}e^{-[j(\omega-\omega_0)+\alpha]t}dt-\frac{A}{2j}\int_{0}^{\infty}e^{-[j(\omega+\omega_0)+\alpha]t}dt$$

$$=\frac{A\omega_o}{a^2+\omega_o^2-\omega^2+j2\alpha\omega}$$

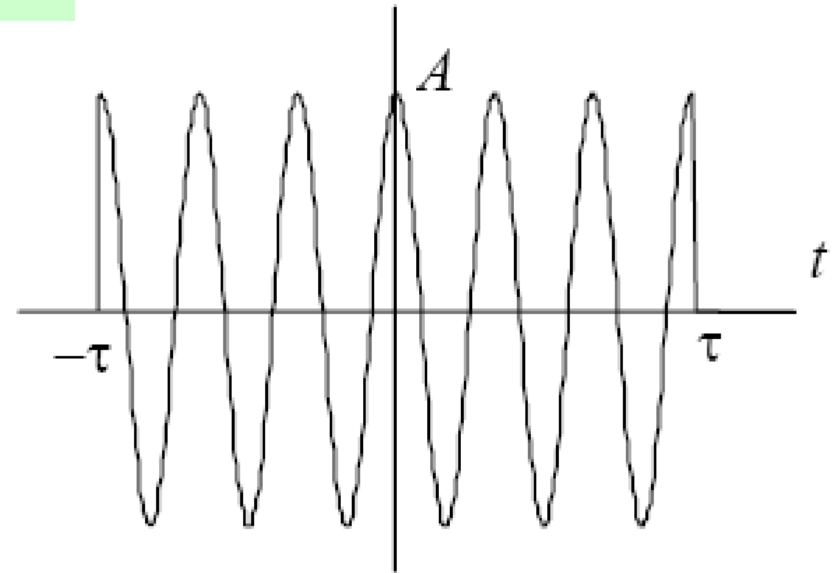
$$|F(\omega)| = \frac{A\omega_o}{\sqrt{\left(a^2 + \omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + (2\alpha\omega)^2}} \qquad \angle F(\omega) = \arctan\left(\frac{-2\alpha\omega}{\alpha^2 + \omega_o^2 - \omega^2}\right)$$





Yüksek Frekanslı Vuruş İşareti

$$f(t)=\begin{cases} A\cos\omega_o t, & |t|<\tau \\ 0, & diğer\ yerlerde \end{cases}$$



$$F(\omega)=\int_{-\tau}^{\tau} A\cos\omega_0 t e^{-j\omega t}dt$$

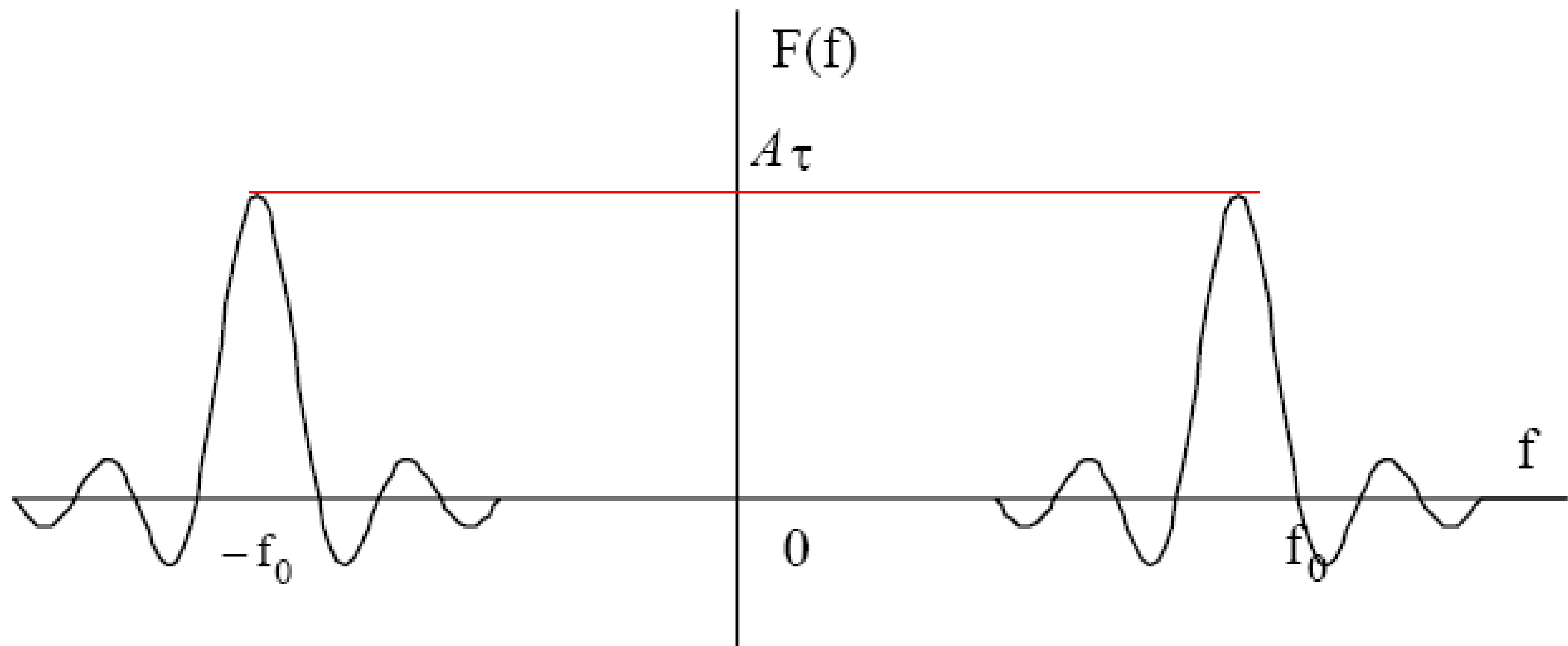
$$=A\int_{-\tau}^{\tau}\frac{e^{-j\omega_0 t}+e^{j\omega_0 t}}{2}e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{A}{2}\int_{-\tau}^{\tau}\left(e^{-j(\omega+\omega_0)t}+e-j^{(\omega-\omega_0)t}\right)dt$$

$$=\frac{A}{2}\left[\frac{1}{-j(\omega+\omega_o)}e^{-j(\omega+\omega_0)t}\Big|_{-\tau}^{\tau}+\frac{1}{-j(\omega-\omega_o)}e^{-j(\omega-\omega_0)t}\Big|_{-\tau}^{\tau}\right]$$

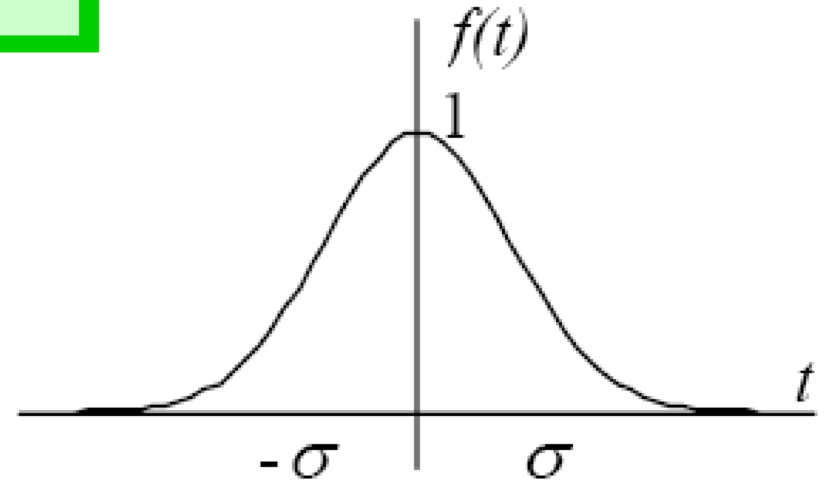
$$= A\tau\left[\frac{\sin(\omega+\omega_0)\tau}{(\omega+\omega_0)\tau}+\frac{\sin(\omega-\omega_0)\tau}{(\omega-\omega_0)\tau}\right]$$

$$F(f) = A\tau[\operatorname{sinc}(f+f_0)\tau + \operatorname{sinc}(f-f_0)\tau]$$



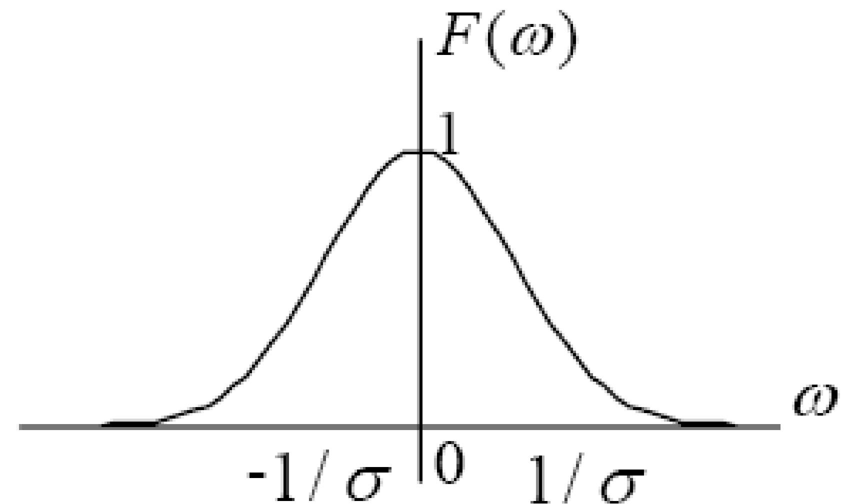
Gauss Vuruş İşareti

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-t^2/\left(2\sigma^2\right)}$$



$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-t^2/\left(2\sigma^2\right)}e^{-j\omega t}dt$$

$$F(\omega)=e^{-\omega^2\sigma^2/2}$$



Tablo. Bazı Fonksiyonların Fourier Dönüşümleri

$f(t)$	$F(\omega)$
$f_n(t)$	$F_n(\omega)$
$\sum_{n=1}^{N} a_n f_n(t)$	$\sum_{n=1}^{N} a_n F_n(\omega)$
$f(t-t_0)$	$F(\omega)e^{-j\omega t_0}$
$f(t)e^{j\omega_0 t}$	$F(\omega-\omega_0)$
$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$(j\omega)^n f(\omega)$
$(-jt)^n f(t)$	$\frac{d^n F(f)}{df^n}$

$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$	$\frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{j\omega_o t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_o) = \delta(f - f_0)$
$sgn(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$j\frac{1}{\pi t}$	$\mathrm{sgn}(\omega)$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(\omega - n\omega_o)$

$Cos(\omega_o t)$	$\pi\left[\delta(\omega-\omega_o)+\delta(\omega+\omega_o)\right]$
$Sin(\omega_o t)$	$\frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-\omega_o)-\delta(\omega+\omega_o)\right]$
$u(t)Cos(\omega_o t)$	$\frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega-\omega_o)+\delta(\omega+\omega_o)\right]+\frac{j\omega}{\omega_o^2-\omega^2}$
$u(t)Sin(\omega_o t)$	$\frac{\pi}{2j}\left[\delta(\omega-\omega_o)-\delta(\omega+\omega_o)\right]+\frac{\omega_o}{\omega_o^2-\omega^2}$
$u(t)e^{-\alpha t}Cos(\omega_o t)$	$\frac{(\alpha+j\omega)}{\omega_o^2+(\alpha+j\omega)^2}$
$u(t)e^{-\alpha t}Sin(\omega_o t)$	$\frac{\omega_o}{\omega_o^2+(\alpha+j\omega)^2}$
$e^{-\alpha\lvert t\rvert}$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$
$e^{-t^2/(2\sigma^2)}$	$\sigma\sqrt{2\pi}\,e^{-\sigma^2\omega^2/2}$

$$u(t)e^{-\alpha t} \qquad \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

$$u(t)te^{-\alpha t} \qquad \frac{1}{(\alpha + j\omega)^2}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) \qquad \frac{2\pi}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi m}{T})$$

Periyodik $f(t)$ $\qquad \frac{2\pi}{T} F_T(\omega) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - m\omega_o)$

$$f(t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) \qquad \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F(\omega - \frac{2\pi m}{T})$$

•Fourier dönüşümünün özellikleri

1) Doğrusallık özelliği

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

$$g(t) \leftrightarrow G(\omega)$$

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \leftrightarrow \alpha F(\omega) + \beta G(\omega)$$

2) Dikgenlik özelliği:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g^{*}(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G^{*}(\omega)d\omega$$

$f(t) = g(t)$ ise

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^{2} dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^{2} d\omega$$ Parseval Teoremi

3) Kayma Özellikleri:

a) Zamanda kayma özelliği

$$f(t-\tau) \leftrightarrow e^{-j\omega\tau} F(\omega)$$

b) Zamanda katlama özelliği

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) g(\tau) d\tau \leftrightarrow F(\omega) G(\omega)$$

c) Modülasyon Özelliği

$$e^{j\omega_o t} f(t) \leftrightarrow F(\omega - \omega_o)$$

d) Zamanda çarpma özelliği

$$f(t) g(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega - u) G(u) du = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega)$$

4) Simetri Özellikleri

$$\mathrm{Im}[f(t)] = 0 \leftrightarrow F(-\omega) = F^{*}(\omega)$$

$$f(-t) = [f(t)]^{*} \leftrightarrow \mathrm{Im}[F(\omega)] = 0$$

$$\mathrm{Re}[f(t)] = 0 \leftrightarrow F(-\omega) = -F^{*}(\omega)$$

$$f(-t) = -f(t)^{*} \leftrightarrow \mathrm{Re}[F(\omega)] = 0$$

5) İkililik Özelliği

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

6) Ölçeklendirme Özelliği

$$f(\alpha t) \leftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

7) Türev Özelliği

$$\frac{df(t)}{dt} = (j\omega)F(\omega) \qquad \frac{d^n f(t)}{dt^n} = (j\omega)^n F(\omega)$$

8) İntegral Özelliği

$$F\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right\} \leftrightarrow \frac{1}{j\omega}F(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$$

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$$

9) İlinti Özelliği

$$C_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t+\tau)dt \leftrightarrow G(\omega)F(-\omega)$$

• DZD Sistemlerin Frekans Domeni Analizi

Diferansiyel Denklem Modeli

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m}$$

$$a_N (j\omega)^N Y(\omega) + a_{N-1}(j\omega)^{N-1} Y(\omega) + \ldots + a_1 (j\omega) Y(\omega) + a_0 Y(\omega)$$
$$= b_M (j\omega)^M X(\omega) + b_{M-1}(j\omega)^{M-1} X(\omega) + \ldots + b_1 (j\omega) X(\omega) + b_0 X(\omega)$$

$$Y(\omega) = \frac{b_M (j\omega)^M + b_{M-1}(j\omega)^{M-1} + \ldots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_N (j\omega)^N + a_{N-1}(j\omega)^{N-1} + \ldots + a_1 (j\omega) + a_0} X(\omega)$$

Sistemin Frekans Transfer Fonksiyonu

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

$$H(\omega) = \frac{b_M(j\omega)^M + b_{M-1}(j\omega)^{M-1} + \ldots + b_1(j\omega) + b_0}{a_N(j\omega)^N + a_{N-1}(j\omega)^{N-1} + \ldots + a_1(j\omega) + a_0}$$

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\angle H(\omega)}$$

$$X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\angle X(\omega)}$$

$$Y(\omega) = |Y(\omega)|e^{j\angle Y(\omega)}$$

$$|Y(\omega)|e^{j\angle Y(\omega)} = |H(\omega)||X(\omega)|e^{j(\angle H(\omega) + \angle X(\omega))}$$

$$|Y(\omega)| = |H(\omega)||X(\omega)|$$

$$\angle Y(\omega) = \angle H(\omega) + \angle X(\omega)$$

$$Y_k = H(k\omega_o)X_k$$

$$|Y_k| = |H(k\omega_o)||X_k|$$

$$\angle Y_k = \angle H(k\omega_o) + \angle X_k$$

Birim Vuruş Tepkesi Modeli

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

Örnek Transfer fonksiyonu frekans domeninde

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$$

olan doğrusal bir sistem veriliyor. Bu devre girişine

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2} Cos(t - \pi / 6) + \frac{1}{4} Sin(\sqrt{3}t - \pi / 4)$$

işareti uygulandığında devre çıkışında elde edilen $y(t)$ işaretini hesaplayınız.

Çözüm: $x(t)$ işareti periyodik olup ($\omega_0 = 0,\ \omega_1 = 1,\ \omega_2 = \sqrt{3}$ [rad / sn]) olmak üzere üç açısal frekans içermektedir. Sonuç olarak Fourier katsayıları $x(t)$ nin üstel formda yazılmasıyla

$$X_0 = 1$$

$$X_{-1} = \frac{1}{4} e^{j\pi/6}$$

$$X_1 = \frac{1}{4} e^{-j\pi/6}$$

$$X_{-2} = \frac{-1}{8j} e^{j\pi/4}$$

$$X_2 = \frac{1}{8j} e^{-j\pi/4}$$

olarak elde edilir.

Transfer fonksiyonunun bu frekanslardaki değerleri ise,

$$H(0) = \frac{1}{1+j0} = 1$$

$$H(-1) = \frac{1}{1-j1} = \frac{1+j}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\pi/4}$$

$$H(1) = \frac{1}{1+j1} = \frac{1-j}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\pi/4}$$

$$H(-\sqrt{3}) = \frac{1}{1-j\sqrt{3}} = \frac{1+j\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}e^{j\pi/3}$$

$$H(\sqrt{3}) = \frac{1}{1+j\sqrt{3}} = \frac{1-j\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}e^{-j\pi/3}$$

şeklinde bulunur.

Karşılık gelen çıkış işaretinin Fourier katsayıları da

$$Y_0 = H(0)X_0 = 1$$

$$Y_{-1} = H(-1)X_{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\pi/4}\,\frac{1}{4}e^{j\pi/6} = \frac{\sqrt{2}}{8}e^{j5\pi/12}$$

$$Y_1 = H(1)X_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\pi/4}\,\frac{1}{4}e^{-j\pi/6} = \frac{\sqrt{2}}{8}e^{-j5\pi/12}$$

$$Y_{-2} = H(-\sqrt{3})X_{-2} = -\frac{1}{2}e^{j\pi/3}\,\frac{1}{8j}e^{j\pi/4} = -\frac{1}{16j}e^{j7\pi/12}$$

$$Y_2 = H(\sqrt{3})X_2 = \frac{1}{2}e^{-j\pi/3}\,\frac{1}{8j}e^{-j\pi/4} = \frac{1}{16j}e^{-j7\pi/12}$$

Bulunan bu Fourier serisi katsayılarından yararlanarak $y(t)$ işareti

$$y(t) = \sum_{k=-2}^{2} Y_k e^{j\omega_k t}$$

ifadesi kullanılarak yazılabilir. Y_k değerleri yerine yazılıp gerekli işlemlerden sonra çıkış işareti

$$y(t) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{4} Cos\left(t - \frac{5\pi}{12}\right) - \frac{1}{8} Sin\left(\sqrt{3}t - \frac{7\pi}{12}\right)$$

şeklinde bulunur.

DZD Sistemlerin s-Domeni Modelleri

- **İki Yanlı Laplace dönüşümü**

f(t) fonksiyonu yerine aşağıdaki fonksiyonun Fourier dönüşümünü alalım:

$$f_1(t) = e^{-\sigma t} f(t)$$

$$F_1(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt \qquad = F(\sigma + j\omega)$$

$s = \sigma + j\omega$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$F(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

ters Fourier dönüşümü de

$$f_1(t)=f(t)e^{-\sigma t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma+j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

ya da

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma+j\omega)e^{(\sigma+j\omega)t}d\omega$$

biçiminde olur.

$\sigma + j\omega \rightarrow s$ ve $d\omega \rightarrow \frac{1}{j} ds$ değişken dönüşümüyle

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) e^{st} ds$$ elde edilir

Sonuç olarak,

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$ ve $$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) e^{st} ds$$

eşitlikleri sırasıyla karmaşık Fourier dönüşümü ve ters karmaşık Fourier dönüşümü adını alır. Ya da iki yanlı Laplace dönüşümü ve iki yanlı ters Laplace dönüşümü adını alır.

Herhangi bir işaretin iki yanlı Laplace dönüşümünün alınabilmesi için aşağıdaki ifadenin sonlu olması gerekir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) e^{-st} \right| dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) \right| e^{-\sigma t} dt$$

Her sürekli işaretin Fourier dönüşümü olmadığı gibi, Laplace-dönüşümü de olmayabilir. Bir başka deyişle, tüm sürekli işaretlerin Laplace dönüşümleri yakınsamayabilir. Ayrıca yakınsama s-düzleminde belli bir bölge için mümkün olur. Bu bölge s-düzleminde *yakınsama bölgesi* olarak adlandırılır . Bu bölge

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) e^{-st} \right| dt < \infty \quad \text{ya da} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) \right| e^{-\sigma t} dt < \infty$$

şartını sağlayan s lerin bulunduğu bölgedir.

Yakınsama bölgesinin bilinmesi eşsizlik özelliğinin varlığının bilinmesi için gereklidir

Örnek: $x(t) = e^{\alpha t} u(t)$ ve $y(t) = -e^{\alpha t} u(-t)$

işaretlerinin Laplace dönüşümlerini bulalım:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha t} u(t) e^{-st} dt = \int_{0}^{\infty} e^{\alpha t} e^{-st} dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt = \frac{-1}{s-\alpha} e^{-(s-\alpha)t} \Big|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{s-\alpha} \quad , \qquad \mathrm{Re}\{s\} > \mathrm{Re}\{\alpha\}$$

$$Y(s) = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha t} u(-t) e^{-st} dt$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t} e^{-st} dt$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} e^{-(s-\alpha)t} dt$$

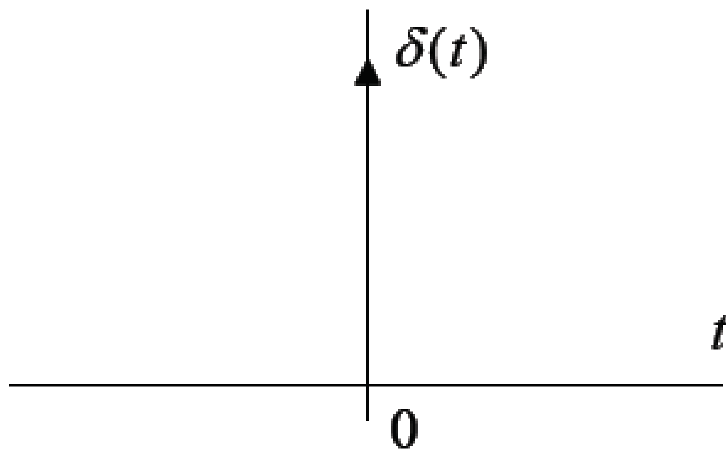
$$= \frac{1}{s-\alpha} e^{-(s-\alpha)t} \Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{s-\alpha} \quad , \quad \mathrm{Re}\{s\} < \mathrm{Re}\{\alpha\}$$

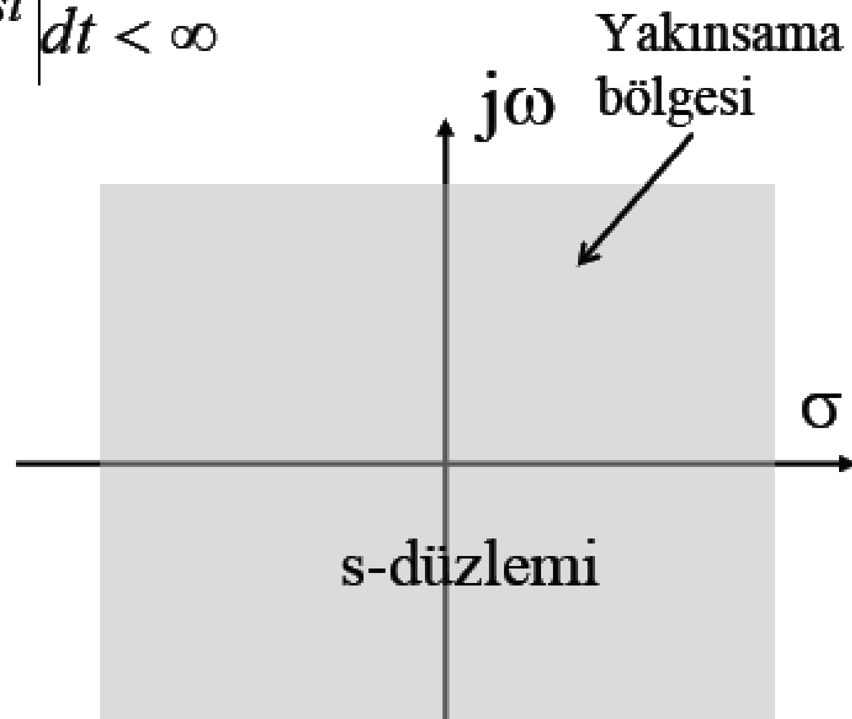
Bazı işaretlerin İki Yanlı Laplace dönüşümleri

- Birim vuruş işareti

$$L\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1$$

Yakınsama bölgesi: $\int_{-\infty}^{\infty} \left| \delta(t) e^{-st} \right| dt < \infty$

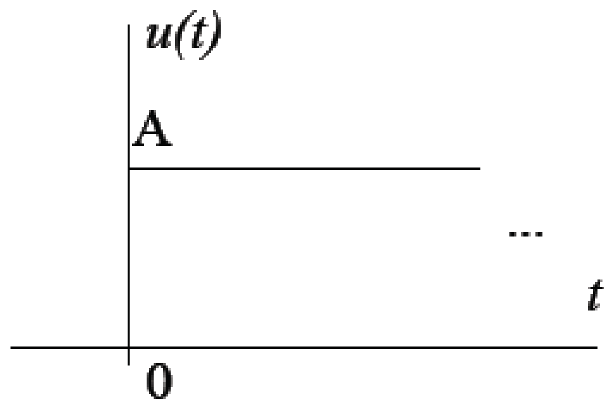


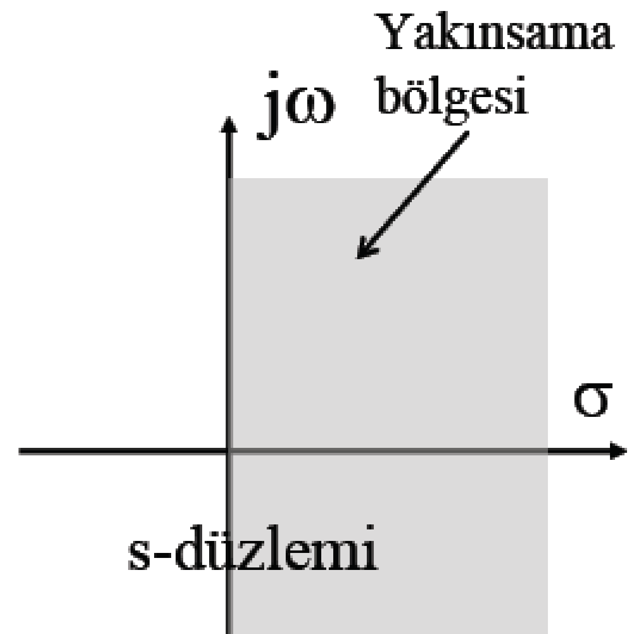


- Birim basamak işareti

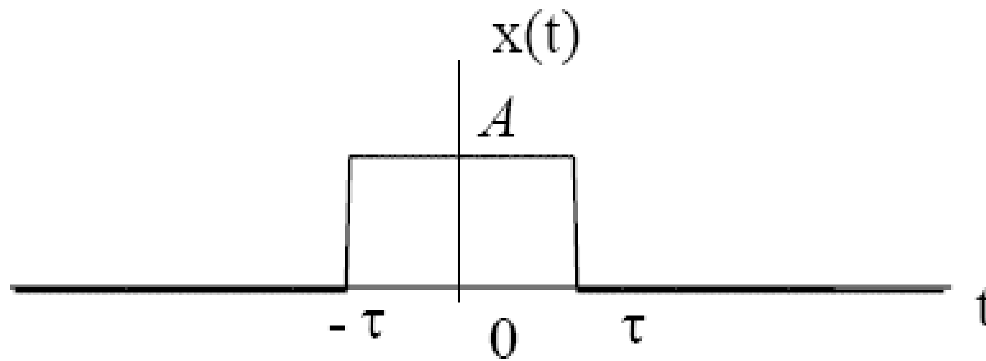
$$L\{u(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{s} \quad , \quad \text{Re}\{s\} > 0$$





- Dikdörtgen vuruş işareti



$$X(s)=\int_{-\tau}^{\tau} Ae^{-st}dt=-\frac{A}{s}e^{-st}\Big|_{-\tau}^{\tau}=\frac{A}{s}\left(e^{s\tau}-e^{-s\tau}\right)$$

tüm s değerlerinde yakınsar.

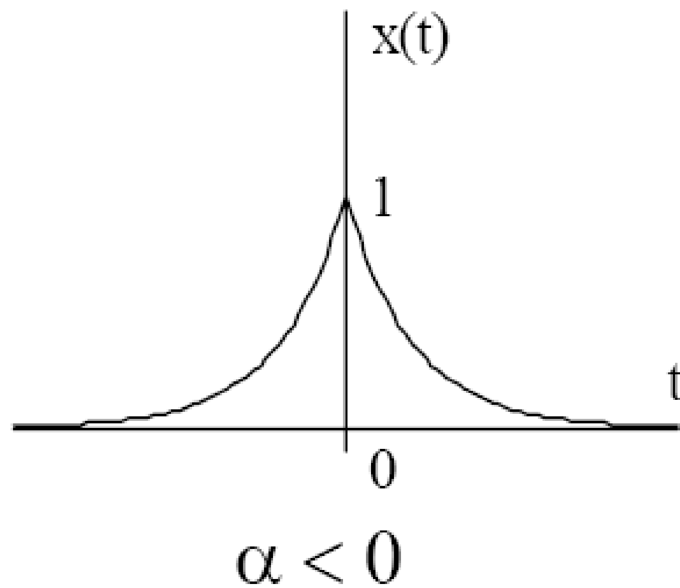
$\tau=\infty$ olması halinde ise $\mathrm{Re}(s)<0$ ve $\mathrm{Re}(s)>0$

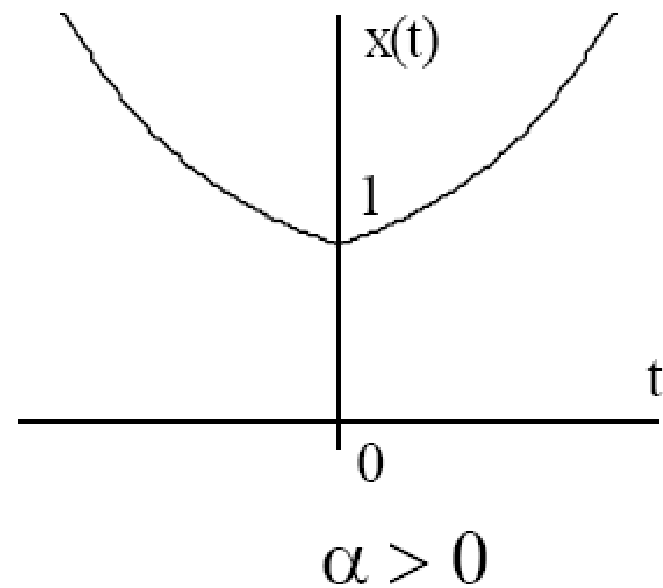
koşullarını aynı anda sağlayan bölge mevcut olmadığından yakınsamaz

- iki yanlı simetrik karmaşık üstel işaret

$$x(t) = e^{\alpha|t|}, \quad -\infty \leq t \leq \infty$$

$$x(t) = e^{\alpha|t|} = e^{-\alpha t}u(-t) + e^{\alpha t}u(t)$$





$\alpha < 0$ durumu için Laplace dönüşümünü bulalım:

$$L\left\{e^{\alpha|t|}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha|t|} e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-\alpha t} e^{-st} dt + \int_{0}^{\infty} e^{\alpha t} e^{-st} dt$$

Birinci integralin değeri:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-\alpha t} e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-(s+\alpha)t} dt = -\frac{1}{s+\alpha} e^{-(s+\alpha)t} \Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{s+\alpha}$$

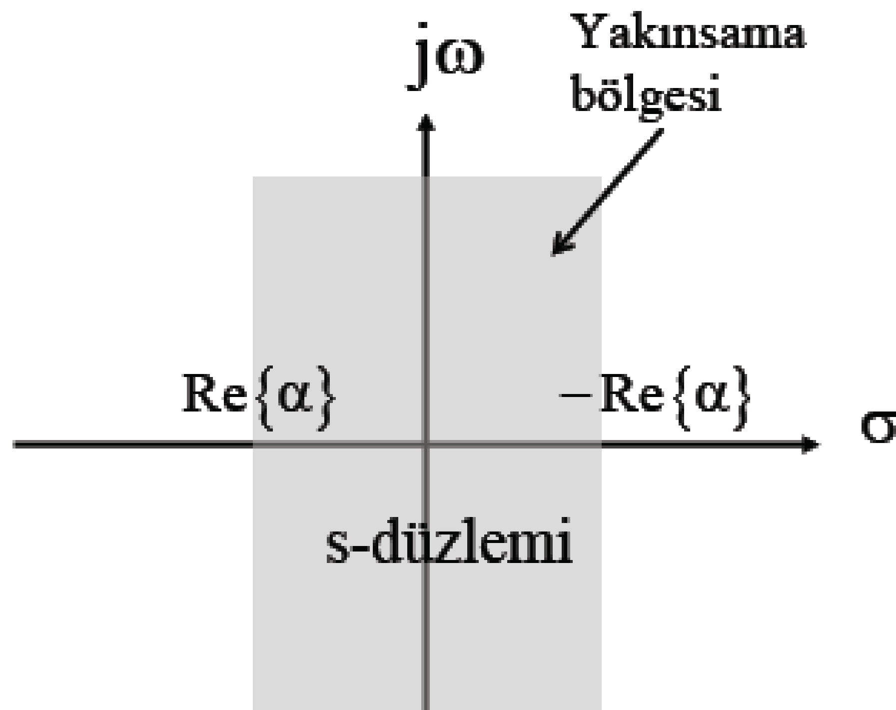
$$\mathrm{Re}(s) < -\mathrm{Re}(\alpha)$$

ikinci integralin değeri:

$$\int_{0}^{\infty} e^{\alpha t} e^{-st} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt = -\frac{1}{s-\alpha} e^{-(s-\alpha)t} \Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{s-\alpha}$$

$$\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(\alpha)$$

$$X(s) = \frac{1}{s-\alpha} - \frac{1}{s+\alpha} \quad , \quad \mathrm{Re}\{\alpha\} < s < -\mathrm{Re}\{\alpha\}$$



- Tek Yanlı Laplace dönüşümü

$$F(s)=\int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds$$

$$\mathrm{Re}\{s\}>\mathrm{Re}\{\beta\}$$

Bazı işaretlerin Tek Yanlı Laplace dönüşümleri

- Birim basamak işareti

$$L\{u(t)\} = \int_0^\infty u(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{s} \quad , \quad \text{Re}\{s\} > 0$$

- Tek yanlı üstel işaret

$$x(t) = e^{\beta t}u(t)$$

$$L\{e^{\beta t}u(t)\} = \int_0^\infty e^{\beta t}e^{-st}u(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s-\beta)t}dt = \frac{1}{s-\beta}$$

$$\text{Re}(s) > \text{Re}(\beta)$$

Fonksiyon	Tek yanlı LD	YB
$\delta(t)$	1	$-\infty<s<\infty$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$e^{\beta t}u(t)$	$\frac{1}{s-\beta}$	$\mathrm{Re}\{s\} > \mathrm{Re}\{\beta\}$
$tu(t) = r(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$t^n e^{\beta t}u(t)$	$\frac{n!}{(s-\beta)^{n+1}}$	$\mathrm{Re}\{s\} > \mathrm{Re}\{\beta\}$

Fonksiyon	Tek yanlı LD	YB
$t^n e^{\beta t} u(t)$	$\dfrac{n!}{(s-\beta)^{n+1}}$	$Re\{s\} > Re\{\beta\}$
$Cos\omega_0 t\ u(t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$Re\{s\} > 0$
$Sin\omega_0 t\ u(t)$	$\dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$Re\{s\} > 0$
$e^{\beta t} Cos\omega_0 t\ u(t)$	$\dfrac{(s-\beta)}{(s-\beta)^2+\omega_0^2}$	$Re\{s\} > Re\{\beta\}$
$e^{\beta t} Sin\omega_0 t\ u(t)$	$\dfrac{\omega_0}{(s-\beta)^2+\omega_0^2}$	$Re\{s\} > Re\{\beta\}$

Fonksiyon	Tek yanlı LD	YB
$\sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT)$	$\frac{1}{1-e^{-sT}}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$f(t) = f(t+T)$	$\frac{\int_0^T f(t)e^{-st}dt}{1-e^{-sT}}$	, T: periyot

• Laplace Dönüşümünün Özellikleri

A-Tek yanlı ve iki yanlı LD için geçerli olan özellikler

- Doğrusallık Özelliği

$$af_1(t) + bf_2(t) \leftrightarrow aF_1(s) + bF_2(s)$$

- Kayma Özellikleri

a) Zamanda kayma

$$f(t) \leftrightarrow F(s) \quad , \quad \mathrm{Re}\{\beta\} < \mathrm{Re}\{s\} < \mathrm{Re}\{\alpha\}$$

$$f(t - t_0) \leftrightarrow e^{-st_0}F(s) \quad , \quad \mathrm{Re}\{\beta\} < \mathrm{Re}\{s\} < \mathrm{Re}\{\alpha\}$$

b) Frekansda kayma

$$f(t) \leftrightarrow F(s) \quad , \quad \text{Re}\{\beta\} < \text{Re}\{s\} < \text{Re}\{\alpha\}$$

$$e^{-s_0 t} f(t) \leftrightarrow F(s+s_0) \quad , \quad \text{Re}\{\beta\} - \sigma_0 < \text{Re}\{s\} < \text{Re}\{\alpha\} - \sigma_0$$

c) Zamanda katlama

$$f(t) \leftrightarrow F(s) \quad , \quad \text{Re}\{\beta_f\} < \text{Re}\{s\} < \text{Re}\{\alpha_f\}$$

$$g(t) \leftrightarrow G(s) \quad , \quad \text{Re}\{\beta_g\} < \text{Re}\{s\} < \text{Re}\{\alpha_g\}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau = f(t) * g(t) \leftrightarrow F(s)G(s) \; ,$$

$$\max\{\text{Re}(\beta_f), \text{Re}(\beta_g)\} < \text{Re}\{s\} < \min\{\text{Re}(\alpha_f), \text{Re}(\alpha_g)\}$$

d) Frekansda katlama

$$f(t)g(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi j}\left[F(s) * G(s)\right] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(\xi)G(s-\xi)d\xi$$

- Ölçeklendirme Özelliği

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}F\left(\tfrac{s}{a}\right)$$

- Frekansda türev

$$(-t)^n f(t) \leftrightarrow \frac{d^n F(s)}{ds^n} \quad \text{veya} \quad f(t)t^n \leftrightarrow (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

B-İki yanlı LD için ek özellikler

- Zamanda türev

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow s^n F(s)$$

- Zamanda integral

$$f(t) \leftrightarrow F(s) \quad , \quad \mathrm{Re}\{\beta\} < \mathrm{Re}\{s\} < \mathrm{Re}\{\alpha\}$$

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s} \quad , \quad \max\{\mathrm{Re}\{\beta\},0\} < \mathrm{Re}\{s\} < \mathrm{Re}\{\alpha\}$$

$$\int_{t}^{\infty} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s} \quad , \quad \mathrm{Re}\{\beta\} < \mathrm{Re}\{s\} < \min\{\mathrm{Re}\{\alpha\},0\}$$

C-Tek yanlı LD için ek özellikler

- Zamanda türev

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^{(1)}(0) - s^{n-3} f^{(2)}(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

- Zamanda integral

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s}$$

$$\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^0 f(\tau)d\tau}{s}$$

- Başlangıç değeri teoremi

$$f(0) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

- Son değer teoremi

$$\lim_{s \to 0} sF(s) = f(\infty)$$

- İlinti Özelliği

$$C_{fg}(\tau) = f(t) \otimes g(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t+\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(t-\tau)dt$$

$$= G(s)F(-s)$$

•Ters Laplace dönüşümü

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_M s^M+b_{M-1}s^{M-1}+\ldots+b_0}{a_N s^N+a_{N-1}s^{N-1}+\ldots+a_0}$$

$$\text{uygun} \quad \text{fonksiyon} \quad \rightarrow N>M$$

$$F(s)=Q(s)+\frac{R(s)}{D(s)}$$

$$Q(s)=q_{M-N}s^{M-N}+q_{M-N-1}s^{M-N-1}+\ldots+q_1 s+q_0$$

$$q(t)=q_{M-N}\delta^{M-N}(t)+q_{M-N-1}\delta^{M-N-1}(t)+\ldots+q_1\delta'(t)+q_0\delta(t)$$

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad \text{ve} \quad N>M \quad \text{olsun}$$

$$F(s) = K \frac{\prod_{i=1}^{M} (s - z_i)}{\prod_{j=1}^{N} (s - p_j)}$$

2-Kısmi Kesirlere açılım yöntemi

- Tüm kutuplar katsız ise

$$F(s)=\sum_{j=1}^{N}\frac{A_j}{s-p_j}=\frac{A_1}{s-p_1}+\frac{A_2}{s-p_2}+\ldots+\frac{A_N}{s-p_N}$$

$$A_j=\left[\left(s-p_j\right)F(s)\right]\Big|_{s=p_j}$$

- Bazı kutuplar katlı ise

Eğer F(s) $s = p_k$ da r katlı köke sahip ise seriye açılım şu şekilde olacaktır:

$$F(s) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}} \frac{A_j}{\left(s - p_j\right)} + \sum_{i=1}^{r} \frac{B_i}{\left(s - p_k\right)^i}$$

$$B_{r-i+1} = \frac{1}{(i-1)!} \left[\frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} F(s) \left(s - p_k\right)^r \right] \Bigg|_{s = p_k}$$

Tablo:

Kısmi kesirlere açılımda sık ortaya çıkan bazı terimlerin ters Laplace Dönüşümleri

Kısmi terim	$\mathrm{Re}(s) \geq \mathrm{Re}(P_k)$	$\mathrm{Re}(s) < \mathrm{Re}(P_k)$
$\dfrac{1}{s-p}$	$e^{pt}u(t)$	$-e^{pt}u(-t)$
$\dfrac{1}{(s-p)^2}$	$te^{pt}u(t)$	$-te^{pt}u(-t)$
$\dfrac{1}{(s-p)^m}$	$\dfrac{t^{m-1}e^{pt}u(t)}{(m-1)!}$	$\dfrac{-t^{m-1}e^{pt}u(-t)}{(m-1)!}$

Örnek:

$$F(s)=\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}$$

1) $-1<\mathrm{Re}\{s\}<2$

2) $\mathrm{Re}\{s\}>2$

3) $\mathrm{Re}\{s\}<-1$

$f(t)=?$

Çözüm:

$$F(s)=\frac{A}{s+1}+\frac{B_1}{s-2}+\frac{B_2}{(s-2)^2}+\frac{B_3}{(s-2)^3}$$

$$A=(s+1)\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}\bigg|_{s=-1}=-1/3$$

$$B_{r-i+1}=\frac{1}{(i-1)!}\left[\frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}}F(s)(s-p_k)^r\right]\bigg|_{s=p_k}$$

$$F(s)=\frac{A}{s+1}+\frac{B_1}{s-2}+\frac{B_2}{(s-2)^2}+\frac{B_3}{(s-2)^3}$$

R=3, i=1

$$B_3=\left.\frac{5s^2-15s-11}{s+1}\right|_{s=2}=-7$$

$$B_2=\left.\frac{d}{ds}\left(\frac{5s^2-15s-11}{s+1}\right)\right|_{s=2}=4$$

$$B_1=\left.\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{5s^2-15s-11}{s+1}\right)\right|_{s=2}=1/3$$

$$F(s)=\frac{-1/3}{s+1}+\frac{1/3}{s-2}+\frac{4}{(s-2)^2}+\frac{-7}{(s-2)^3}$$

1) $$f(t)=-\frac{1}{3}e^{-t}u(t)+\left[-\frac{1}{3}e^{2t}-4te^{2t}+\frac{7}{2}t^2e^{2t}\right]u(-t)$$

2) $$f(t)=-\frac{1}{3}e^{-t}u(t)-\left[-\frac{1}{3}e^{2t}-4te^{2t}+\frac{7}{2}t^2e^{2t}\right]u(t)$$

3) $$f(t)=\frac{1}{3}e^{-t}u(-t)+\left[-\frac{1}{3}e^{2t}-4te^{2t}+\frac{7}{2}t^2e^{2t}\right]u(-t)$$

•DZD Sürekli Zamanlı Sistemlerin Laplace Dönüşümü Analizi

- **Diferansiyel Denklem Modeli**

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m}$$

Sistem nedensel bir sistem ise, bu durumda yukarıdaki ifadenin her iki yanına tek yanlı Laplace dönüşümü uygulanması halinde çıkışın Laplace dönüşümü gerekli düzenlemelerden sonra aşağıdaki gibi olur:

$$Y(s)=\frac{b_M s^M + b_{M-1}s^{M-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{a_N s^N + a_{N-1}s^{N-1}+\ldots+a_1 s+a_0}X(s)$$

$y_{sd}(t)$: sıfır durumlu tepke

$$+\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(y^{(i-1)}(0)\sum_{k=0}^{N-1}a_{N-k}s^{N-i-k}\right)}{a_N s^N + a_{N-1}s^{N-1}+\ldots+a_1 s+a_0}$$

Enerji depolayan elemanlardan gelen başlangıç değerleri

$$+\frac{\sum_{j=1}^{M}\left(x^{(j-1)}(0)\sum_{l=0}^{M-1}b_{M-l}s^{M-j-l}\right)}{a_N s^N + a_{N-1}s^{N-1}+\ldots+a_1 s+a_0}$$

Giriş işareti ve onun türevlerinden gelen başlangıç değerleri

$y_{sg}(t)$: sıfır girişli tepke

$y_{sd}(t)$: Sıfır durumlu tepke = geçici (doğal) tepke
+ uyarılmış (zorlanmış) tepke

$y_{sg}(t)$: sıfır girişli tepke= enerji depolayan elemanlardan gelen başlangıç değerleri
+ giriş işareti ve onun türevlerinden gelen başlangıç değerleri

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$: Transfer Fonksiyonu

$$H(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

Doğal tepke: sistemin transfer fonksiyonunun kutuplarının sistem çıkışında oluşturduğu terimler toplamı

Zorlanmış tepke: giriş işaretinin kutuplarının sistem çıkışında oluşturduğu terimler toplamı

Sıfır girişli tepke: başlangıç değerlerinin oluşturduğu terimlerin ters Laplace dönüşümü

- **Birim Vuruş Tepkesi Modeli**

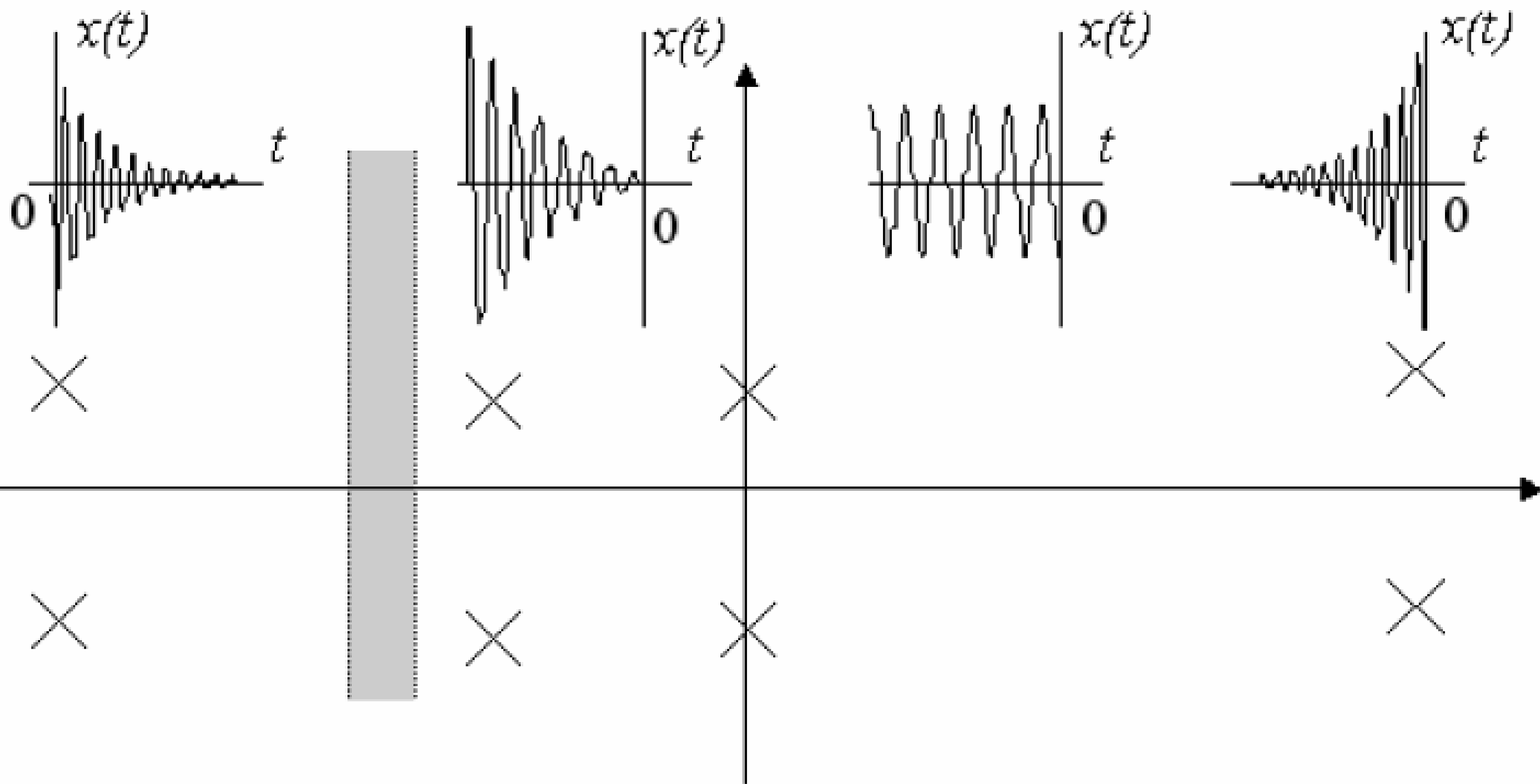
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

- **Kutup-Sıfır Diyagramı ve Kararlılık Analizi**

$$H(s)=\frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

$$H(s)=K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_M)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_N)}$$


x(t)
t
0
x(t)
t
0
x(t)
t
0
x(t)
t
0

Routh-Hurwitz Kararlılık testi

$$D_1(s) = a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \ldots + a_1 s + a_o$$

s^N	a_N	a_{N-2}	a_{N-4}	a_{N-6}	$\cdots$
s^{N-1}	a_{N-1}	a_{N-3}	a_{N-5}	a_{N-7}	$\cdots$
s^{N-2}	b_1	b_2	b_3		
s^{N-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	
s^{N+4}	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	
$\cdots$					
s^1	λ_1				
s^o	k_1				

+ -

$$b_1 = \frac{a_{N-1}a_{N-2} - a_N a_{N-3}}{a_{N-1}}$$

$$b_2 = \frac{a_{N-1}a_{N-4} - a_N a_{N-5}}{a_{N-1}}$$

$$b_3 = \frac{a_{N-1}a_{N-6} - a_N a_{N-7}}{a_{N-1}}$$

...

$$c_1 = \frac{b_1 a_{N-3} - b_2 a_{N-1}}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_{N-4} - b_3 a_{N-1}}{b_1}$$

...

Örnek: $s^6+3s^5+5s^4+9s^3+8s^2+6s+2=0$

s^6	1	5	8	2
s^5	3	9	6	
s^4	$\frac{15-9}{3}=2$	$\frac{24-6}{3}=6$	$\frac{6}{3}=2$	
s^3	$0\rightarrow\varepsilon$	$\frac{12-6}{2}=3$		
s^2	$\frac{6\varepsilon-6}{\varepsilon}$	$\frac{2\varepsilon}{\varepsilon}=2$		
s^1	$\dfrac{\frac{18\varepsilon-18}{\varepsilon}-2\varepsilon}{\frac{6\varepsilon-6}{\varepsilon}}$			
s^0	1			

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{6\varepsilon-6}{\varepsilon}=-\infty$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{18\varepsilon-18}{\varepsilon}-2\varepsilon}{\frac{6\varepsilon-6}{\varepsilon}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-2\varepsilon^2+18\varepsilon-18}{6\varepsilon-6}=3$$

Sonuç: sistem kararsız

Örnek: $s^6+3s^5+5s^4+9s^3+8s^2+6s+4=0$

s^6	1	5	8	4
s^5	3	9	6	
s^4	2	6	4	
s^3	0	0		
s^3	8	12		
s^2	3	4		
s^1	$\frac{4}{3}$			
s^0	1			

$$A(s)=2s^4+6s^2+4$$

$$\tfrac{d}{ds}A(s)=8s^3+12s$$

Sonuç: sistem kararlı

Frekans Tepkesinin Kutup-Sıfır Diyagramından Elde Edilmesi

$$H(s) = K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_M)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_N)}$$

$$|H(s)| = \frac{|K||s-z_1||s-z_2|\ldots|s-z_M|}{|s-p_1||s-p_2|\ldots|s-p_N|} = \frac{|K|\prod_{i=1}^{M}|s-z_i|}{\prod_{k=1}^{N}|s-p_k|}$$

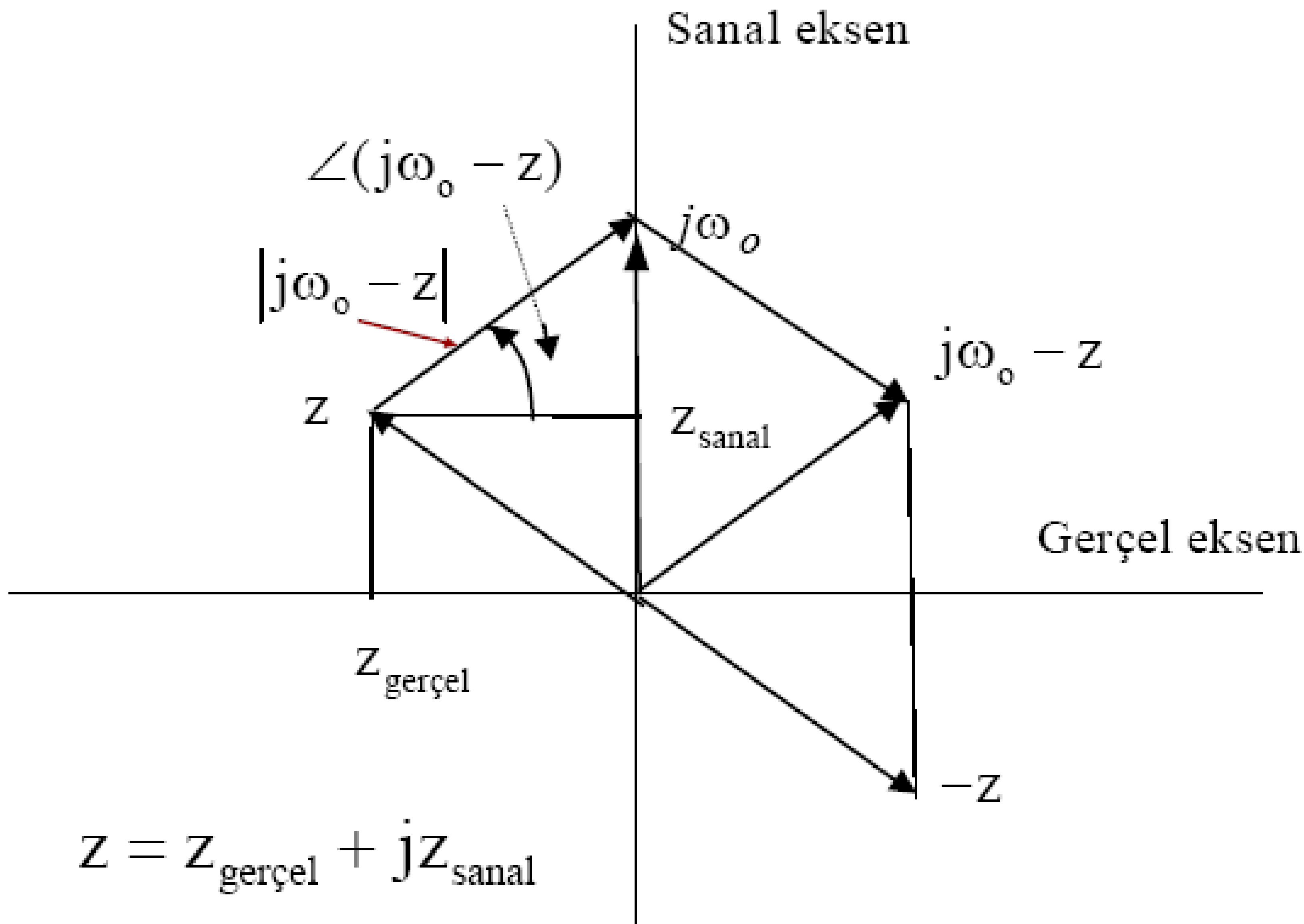
$$\angle H(s) = \angle K + \angle(s-z_1) + \ldots + \angle(s-z_M) - \angle(s-p_1) - \ldots - \angle(s-p_N)$$

$$H(\omega) = H(s)\Big|_{s=j\omega}$$

$$H(\omega) = K\frac{(j\omega - z_1)(j\omega - z_2)\dots(j\omega - z_M)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)\dots(j\omega - p_N)}$$

$$|H(\omega)| = \frac{|K||j\omega - z_1||j\omega - z_2|\dots|j\omega - z_M|}{|j\omega - p_1||j\omega - p_2|\dots|j\omega - p_N|} = \frac{|K|\prod_{i=1}^{M}|j\omega - z_i|}{\prod_{k=1}^{N}|j\omega - p_k|}$$

$$\angle H(j\omega) = \angle K + \sum_{i=1}^{M}\angle(j\omega - z_i) - \sum_{k=1}^{N}\angle(j\omega - p_k)$$



Sanal eksen
$\angle(j\omega_o - z)$
$j\omega_o$
$|j\omega_o - z|$
$j\omega_o - z$
z
z_{sanal}
Gerçel eksen
$z_{gerçel}$
$-z$
$z = z_{gerçel} + jz_{sanal}$

r_i ve ρ_k sırasıyla *i.* inci sıfır ve *k* inci kutbun sanal eksen üzerinde herhangi bir ω_0 noktasına olan uzaklığını temsil etmek üzere, bu frekans değerindeki genlik değeri aşağıdaki ifadeyle verilebilir.

$$|H(\omega_0)| = |K|\frac{r_1 r_2 \ldots r_M}{\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_N} = \frac{|K|\prod_{i=1}^{M} r_i}{\prod_{k=1}^{N} \rho_k}$$

Benzer şekilde ϕ_i ve θ_k sırasıyla *i* inci sıfırdan ve *k* inci kutuptan sanal eksen üzerinde herhangi bir ω_0 noktasına çizilen vektörlerin yatay eksenle saat yönünün ters yönünde yapmış oldukları açıları temsil etmek üzere.

$$\angle H(\omega_0) = \angle K + \phi_1 + \phi_2 + \ldots + \phi_M - \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_N = \angle K + \sum_{i=1}^{M} \phi_i - \sum_{k=1}^{N} \theta_k$$

Bu işlemler sanal eksen üzerindeki tüm noktalar için tekrarlanarak toplam genlik ve faz tepkeleri elde edilir.

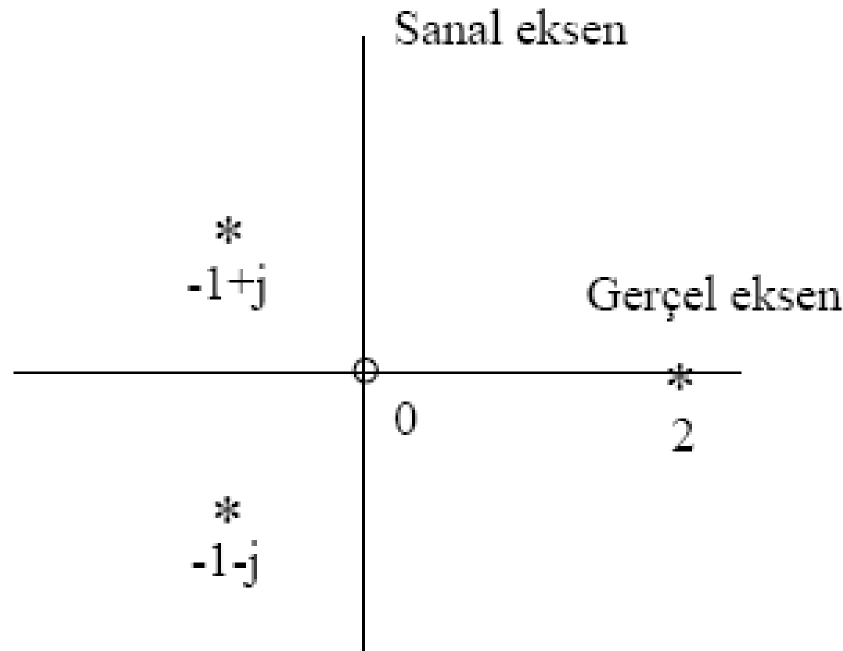
Kazanç faktörü *K* negatif olması halinde $\angle K = \pi$ alınır.

Örnek:

Kutup-sıfır diyagramı Şekilde verilen ve kazanç faktörü K=1 olan üç kutuplu ve bir sıfırlı bir sistemin transfer fonksiyonu $-1 < \mathrm{Re}\{s\} < 2$ bölgesinde yakınsamaktadır.

a)Sistemin transfer fonksiyonu ve birim vuruş tepkesini bulunuz.

b)Sistemin transfer fonksiyonunun genliğini ve fazını karmaşık düzlemde üç boyutlu olarak çiziniz ve frekans ekseni üzerindeki kesitini gösteriniz.



$$H(s)=\frac{s}{(s-(-1-j))(s-(-1+j))(s-2)}=\frac{s}{(s^2+2s+2)(s-2)}$$

$$H(s)=\frac{A_1}{(s-(-1-j))}+\frac{A_2}{(s-(-1+j))}+\frac{A_3}{(s-2)}$$

$$A_1=\frac{-1+2j}{10} \qquad A_2=\frac{-1-2j}{10} \qquad A_3=\frac{1}{5}$$

$$H(s)=\frac{1}{5}\left(-\frac{s+1}{(s+1)^2+1}+2\frac{1}{(s+1)^2+1}+\frac{1}{s-2}\right)$$

$$h(t)=\frac{1}{5}\left(e^{-t}(-Cos\ t+2Sin\ t)\right)u(t)-\frac{1}{5}e^{2t}u(-t)$$

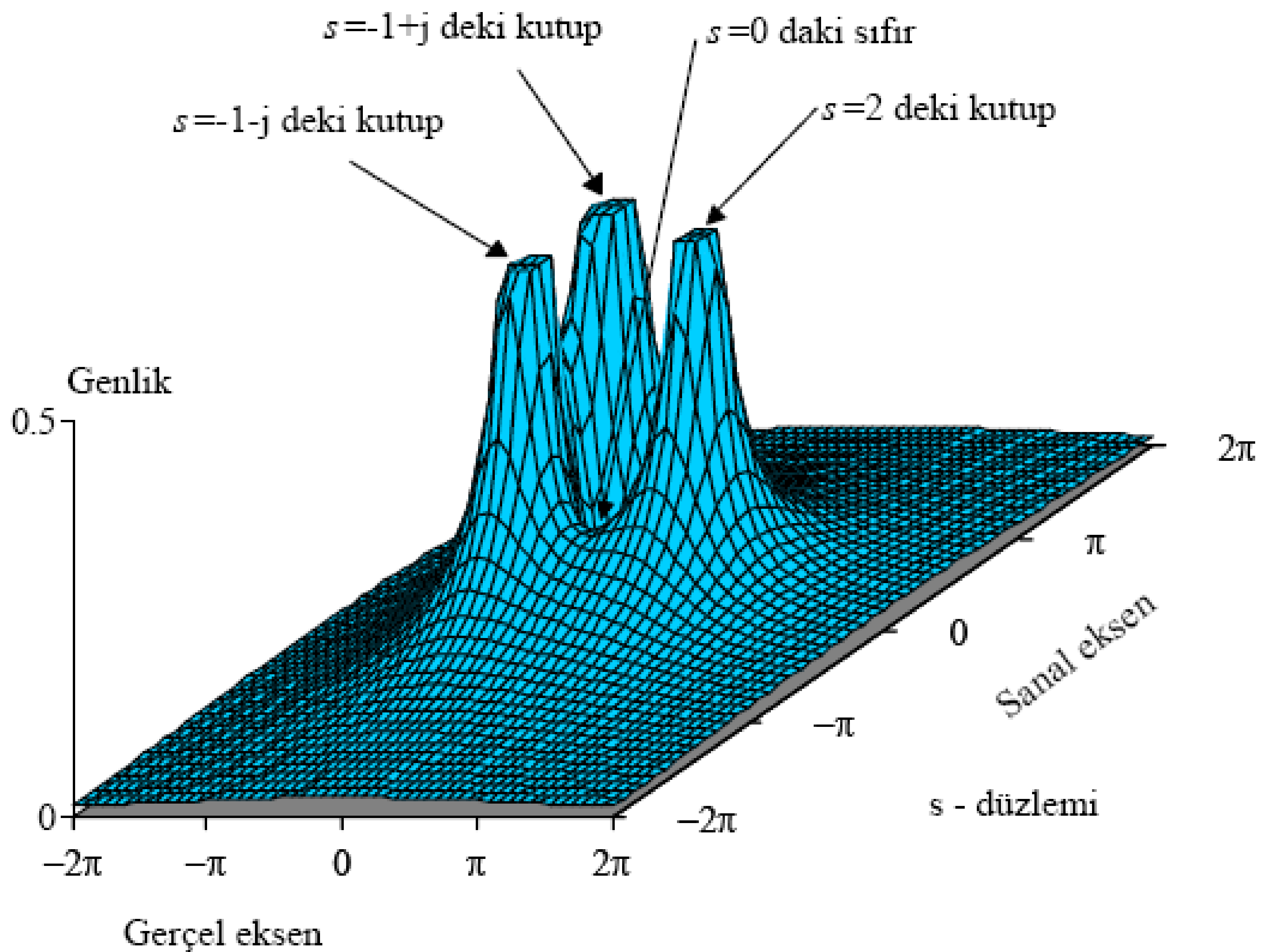
$$\left|H(\sigma + j\omega)\right| = \frac{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}}{\sqrt{\left((\sigma+1)^2 + (\omega+1)^2\right)}\sqrt{\left((\sigma+1)^2 + (\omega-1)^2\right)}\sqrt{\left((\sigma-2)^2 + \omega^2\right)}}$$

$$\angle H(\sigma + j\omega) = \arctan\frac{\omega}{\sigma} - \arctan\frac{\omega+1}{\sigma+1} - \arctan\frac{\omega-1}{\sigma+1} - \arctan\frac{\omega}{\sigma-2}$$

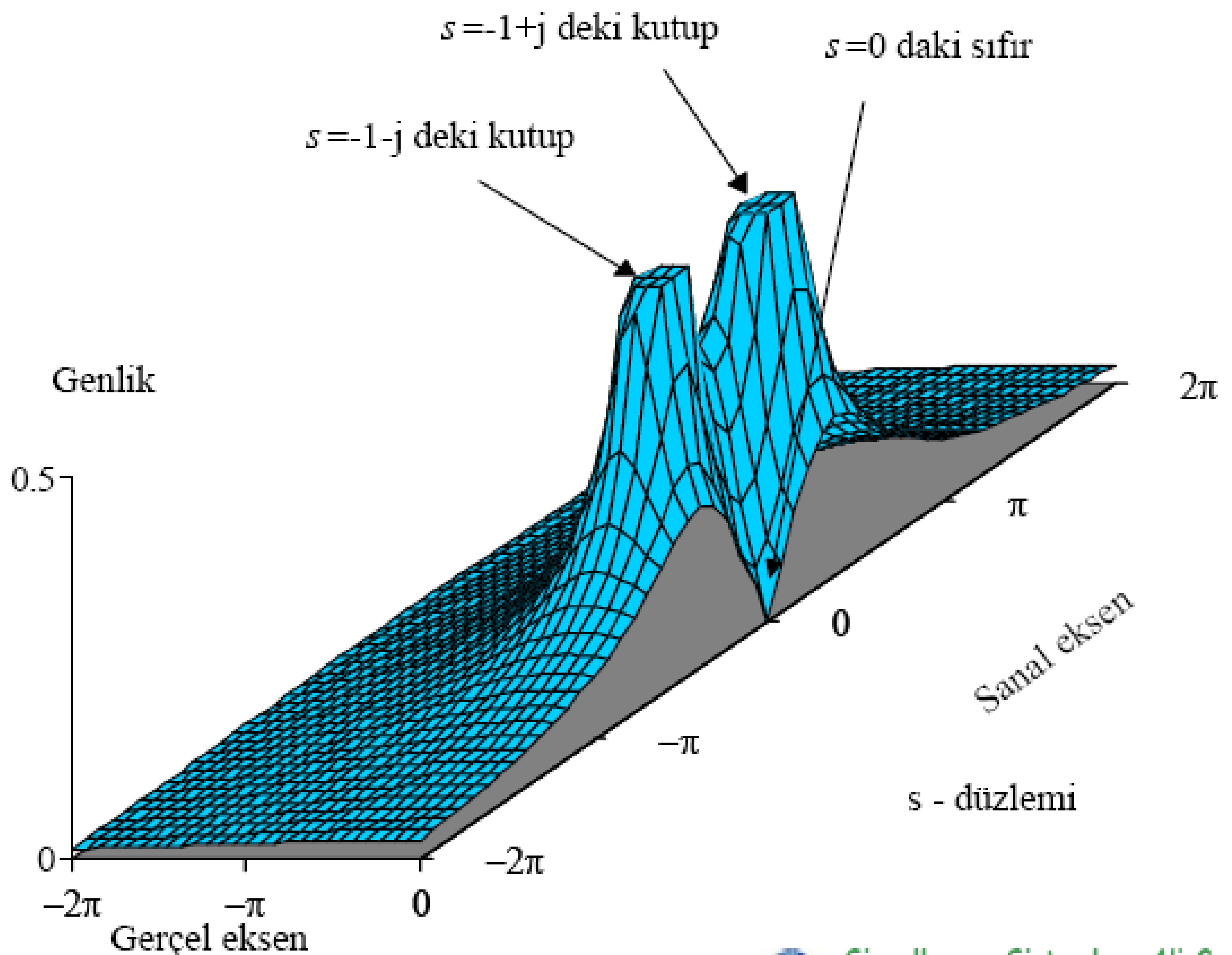
Frekans genlik tepkesi ve faz tepkesi de aşağıdaki ifadelerle hesaplanır:

$$\left|H(\omega)\right| = \frac{\left|j\omega\right|}{\left|j\omega-(-1-j)\right|\left|j\omega-(-1+j)\right|\left|j\omega-2\right|}$$

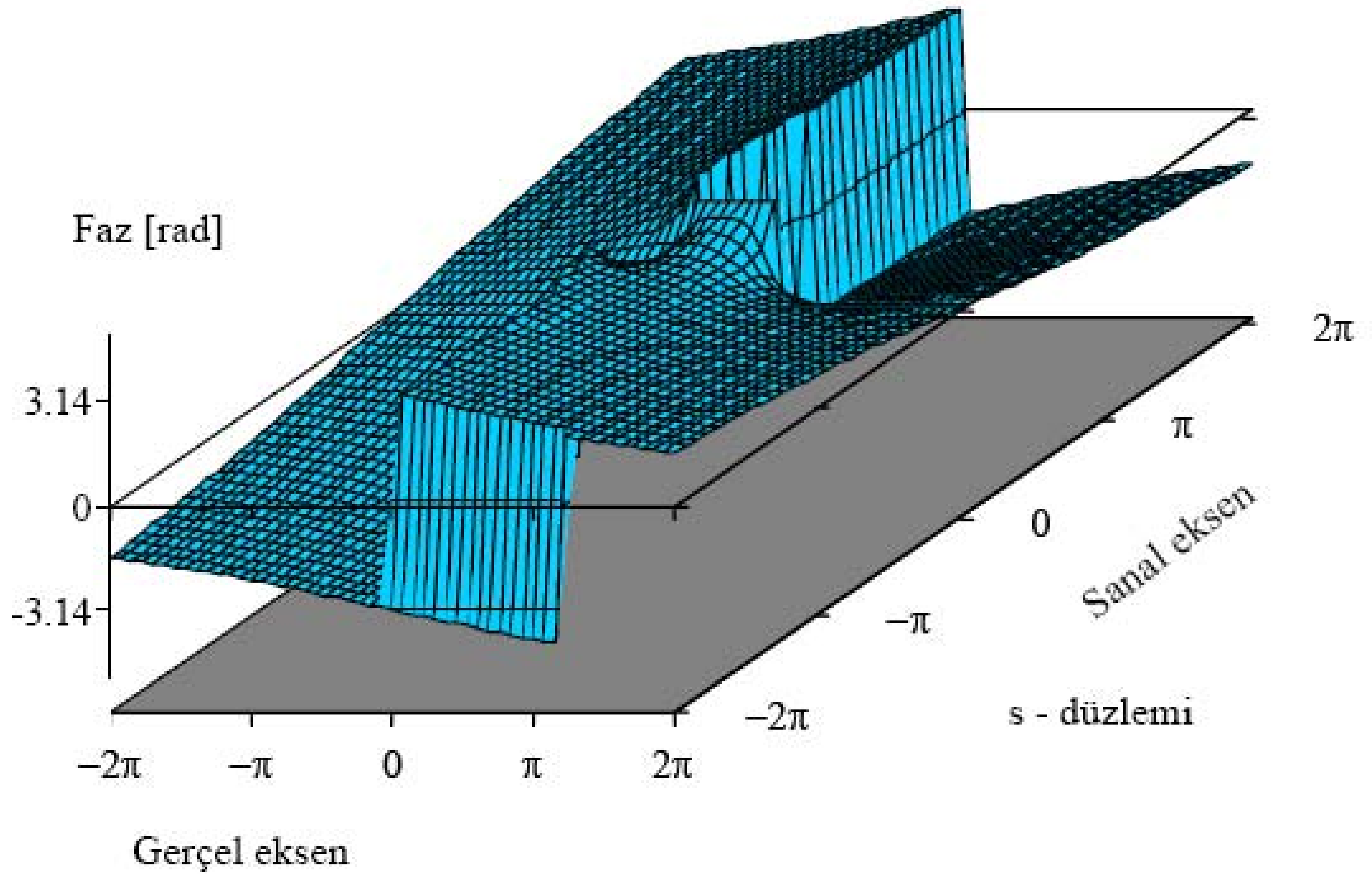
$$\angle H(\omega) = \angle j\omega - \angle j\omega-(-1-j) - \angle j\omega-(-1+j) - \angle j\omega-2$$

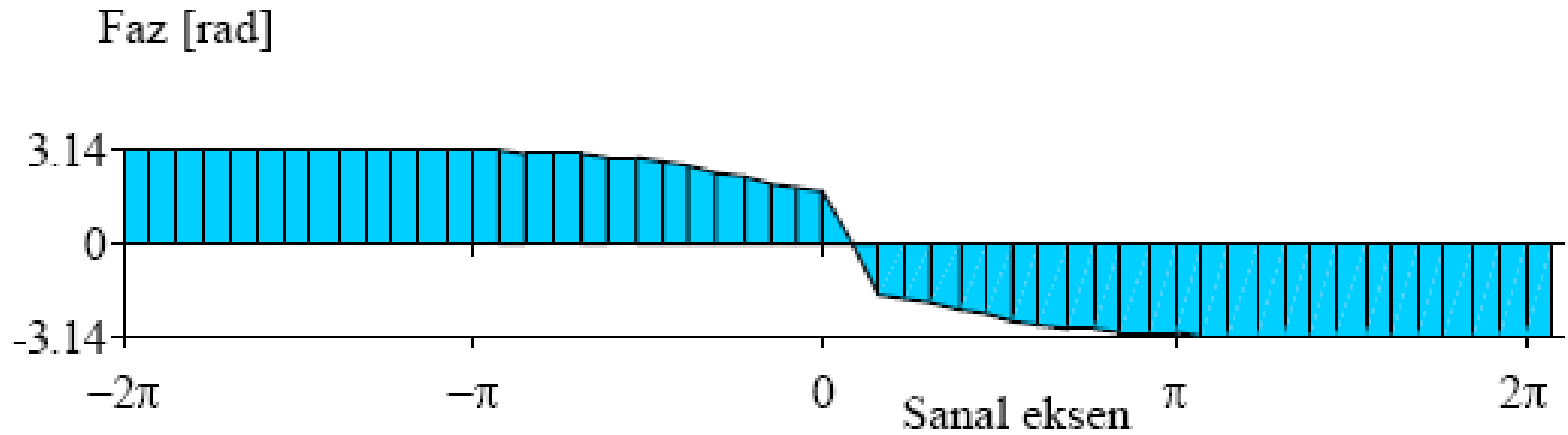

s=-1+j deki kutup
s=0 daki sıfır
s=-1-j deki kutup
s=2 deki kutup
Genlik
0.5
0
−2π
−π
0
π
2π
Gerçel eksen
2π
π
0
−π
−2π
Sanal eksen
s - düzlemi

```
set(GCF,'Renderer','zbuffer');
[x,y]=meshgrid(-5:.11:5,-5:.11:5);
z=sqrt(x.^2+y.^2)./(sqrt((x+1).^2+(y+1).^2).
     *sqrt((x+1).^2+(y-1).^2).*sqrt((x-2).^2+y.^2));
mesh(x,y,z)
shading interp
%colormap(hsv)
colormap(gray)
ylabel('w')
xlabel('sigma')
```



s =-1+j deki kutup
s =0 daki sıfır
s =-1-j deki kutup
Genlik
0.5
0
2π
π
0
−π
−2π
Sanal eksen
s - düzlemi
−2π
−π
0
Gerçel eksen


Faz [rad]
3.14
0
-3.14
−2π
−π
0
π
2π
Gerçel eksen
2π
π
0
−π
−2π
Sanal eksen
s - düzlemi


Faz [rad]
3.14
0
-3.14
−2π
−π
0
Sanal eksen
π
2π

Ayrık Sistemlerin Frekans-Domeni Modelleri

Üstel Ayrık Fourier Serileri

Ayrık periyodik bir $f[n]$ fonksiyonunun üstel ayrık Fourier serisi:

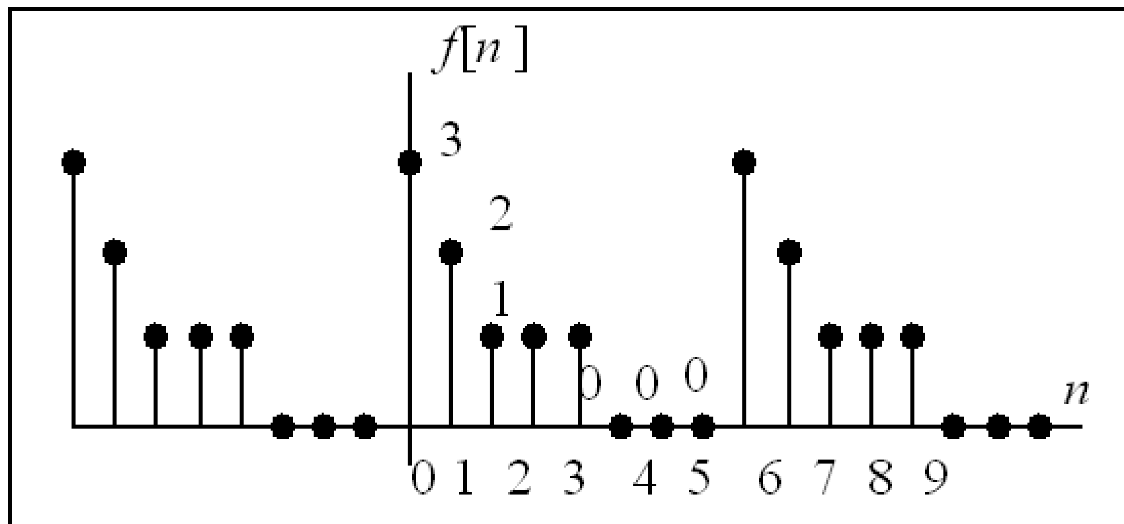
$$f[n] = \sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

ve ters Fourier serisi:

$$F(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

- Periyodik ayrık işaretlerin genlik ve faz tayfları 2π rad/sn peryotlu peryodik çizgi tayfıdır.
- Genlik tayfı çift fonksiyon ve faz tayfı tek fonksiyon olduğundan dolayı bu tayflar N çift ise $(0 \le k \le \frac{N-1}{2})$, tek ise $(0 \le k \le \frac{N}{2} - 1)$ aralığındaki kısmının çizilmesi yeterlidir.

Örnek: Aşağıdaki ayrık periyodik $f[n]$ işaretinin trigonometrik Fourier serisi elde edilmeye çalışılsın:



$$F(k) = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7} f[n]e^{-jk\left(\frac{2\pi}{8}\right)n}, \quad k=1,2,3,4,5,6,7$$

$$F(k) = \frac{1}{8}\left(3e^{-jk\left(\frac{2\pi}{8}\right)0} + 2e^{-jk\left(\frac{2\pi}{8}\right)1} + 1e^{-jk\left(\frac{2\pi}{8}\right)2} + 1e^{-jk\left(\frac{2\pi}{8}\right)3} + 1e^{-jk\left(\frac{2\pi}{8}\right)4}\right)$$

$$F(0)=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7} f[n]e^{-j0\left(\frac{2\pi}{8}\right)n}=1$$

$$F(1)=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7} f[n]e^{-j\left(\frac{2\pi}{8}\right)n}=\frac{1}{8}\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}-j-j\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$F(2)=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7} f[n]e^{-j2\left(\frac{2\pi}{8}\right)n}$$

...

$$F(7)=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7} f[n]e^{-j7\left(\frac{2\pi}{8}\right)n}$$

Ayrık Fourier serisi matrisel formda da yazılabilir.
N peryotlu bir $f[n]$ dizisinin ayrık Fourier serisi

$$F(k)=\sum_{n=0}^{N-1} f[n]W_N^{nk}, \quad 0 \le \mathrm{k} \le \mathrm{N-1}$$

şeklindedir. Bu ifadede $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ dir ve döndürme faktörü olarak adlandırılır.
$W_N^N = 1$ olduğundan dolayı $F(k)$ nın periyodu N dir. Yani, $F(k) = F(k+N)$

$\underline{F}$ elemanları ayrık Fourier katsayıları *F(k)* ve $\underline{f}$ ise periyodik dizinin elemanları *f[n]* den oluşan vektörler olsun, yani,

$$\underline{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} f[0] \\ f[1] \\ . \\ . \\ . \\ f[n-1] \end{bmatrix}_{Nx1} \quad \text{ve} \quad \underline{\mathrm{F}} = \begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ . \\ . \\ . \\ F(N-1) \end{bmatrix}_{Nx1}$$

Bu ifade matrisel formda

$$\underline{F} = V\,\underline{f}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada V NxN boyutlu matris olup elemanları

$$v_{nk} = W_N^{nk}, \quad 0 \le \mathrm{k} \le \mathrm{N-1}, \quad 0 \le \mathrm{n} \le \mathrm{N-1}$$

dir. V matrisi ayrık Fourier serisinin matrisel temsilidir.

Örnek: Yukardaki örnek için bulunan katsayılar matrisel formda yazılsın:

$$\underline{F} = V\,\underline{f} =$$

$$
= \begin{bmatrix}
W_8^{00} & W_8^{10} & W_8^{20} & W_8^{30} & W_8^{40} & W_8^{50} & W_8^{60} & W_8^{70} \\
W_8^{01} & W_8^{11} & W_8^{21} & W_8^{31} & W_8^{41} & & & \\
W_8^{02} & W_8^{12} & W_8^{22} & W_8^{32} & & & & \\
W_8^{03} & W_8^{13} & W_8^{23} & & & & & \\
W_8^{04} & W_8^{14} & & & & & & \\
W_8^{05} & & & & & & & \\
W_8^{06} & & & & & & & \\
W_8^{07} & & & & & & &
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{Nx1}
= \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{8}\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2} - j - j\frac{3\sqrt{2}}{2} \right) \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}_{Nx1}
$$

Ters Ayrık Fourier Serisi

$F(k)$ verildiğinde karşılık gelen periyodik $f[n]$ dizisi,

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) W^{-nk}$$

ile bulunur.

Ayrık Fourier Serisinin Özellikleri

DOĞRUSALLIK ÖZELLİĞİ

$f[n]$ ve $g[n]$ dizileri periyotları N olan ve AFD katsayıları $F(k)$ ve $G(k)$ olan iki dizi olsun.

a ve b gerçel ya da karmaşık iki sabit olmak üzere,

$$af[n] + bg[n] \leftrightarrow aF(k) + bG(k)$$

dir.

DİKGENLİK ÖZELLİĞİ

f[n] ve *g[n]* N periyotlu iki karmaşık dizi olsun. *f[n]* ve *g[n]* nin iç çarpımları bu işaretlerinin ayrık Fourier katsayılarının iç çarpımlarına eşittir.

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f[n]g[n]^{*} = \sum_{k=0}^{N-1} F(k)G(k)^{*}$$

f[n] = g[n] ise

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \left|f[n]\right|^{2} = \sum_{k=0}^{N-1} \left|F(k)\right|^{2}$$

şeklinde **Parseval teoremi** elde edilir. Bu sonuca göre ayrık periyodik işaretler için Parseval teoremi, işaretin gücünün frekans domeninde üstel Fourier serisi katsayılarının genlik karelerinin toplamına eşit olduğunu açıklar.

ZAMANDA KAYMA ÖZELLİĞİ

$$f[n] \leftrightarrow F(k), \text{ periyot=N}$$

$$f[n-m] \leftrightarrow e^{-jk\frac{2\pi}{N}m} F(k)$$

elde edilir.

Ayrık Zamanlı Fourier Dönüşümü:

Ayrık zamanlı bir f[n] işareti sonlu enerjiye sahip ise bu ayrık işaret için uygun olan Fourier dönüşümü *Ayrık Zamanlı Fourier dönüşümü*dür

Ayrık zamanlı $f[n]$ işareti $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f[n]|^2 < \infty$ şartını sağlıyorsa, bu işaret sonlu enerjiye sahiptir denir. $f[n]$ işareti bir enerji işareti ise bu işaretin ayrık Fourier dönüşümü $F\left(e^{j\omega T}\right)$ ile gösterilir ve

$$F\left(e^{j\omega T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-jn\omega T}$$

biçiminde tanımlanır. Bu ifadede T örnekleme periyodudur.

Ters Ayrık Fourier Dönüşümü

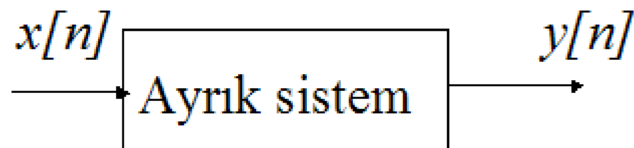
$F\left(e^{j\omega T}\right)$ verildiğinde karşılık gelen $f[n]$ dizisi ise,

$$f[n] = \frac{1}{\omega_s} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} F\left(e^{j\omega T}\right) e^{jn\omega T} d\omega$$

ifadesi ile bulunur.

Doğrusal Zamanla Değişmeyen Ayrık Sistemlerin Frekans Domeni Modelleri

Giriş işaretinin transfer fonksiyonu $X\left(e^{j\omega T}\right)$ ve çıkış işaretinin transfer fonksiyonu $Y\left(e^{j\omega T}\right)$ arasındaki ilişki bulunacaktır.



Fark Denklemi Modeli

Giriş *x[n]* çıkış *y[n]* olan N inci mertebeden ayrık sistemin giriş-çıkış ilişkisi

$$a_o y[n] + a_1 y[n-1] + \ldots + a_N y[n-N] = b_o x[n] + b_1 x[n-1] + \ldots + b_M x[n-M]$$

$$M \leq N$$

şeklinde verilmişti. Bu ifadenin her iki tarafına Ayrık Fourier dönüşümü uygulanırsa,

$$\left(a_0 + a_1 e^{-j\omega T} + a_2 e^{-j2\omega T} + \ldots + a_N e^{-jN\omega T}\right) Y\left(e^{j\omega T}\right)$$

$$= \left(b_0 + b_1 e^{-j\omega T} + b_2 e^{-j2\omega T} + \ldots + b_M e^{-jM\omega T}\right) X\left(e^{j\omega T}\right)$$

elde edilir. Transfer fonksiyonu sürekli sistemlerdekine benzer olarak

$$H\left(e^{j\omega T}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega T}\right)}{X\left(e^{j\omega T}\right)}=\frac{\left(b_0+b_1e^{-j\omega T}+b_2e^{-j2\omega T}+\ldots+b_Me^{-jM\omega T}\right)}{\left(a_0+a_1e^{-j\omega T}+a_2e^{-j2\omega T}+\ldots+a_Ne^{-jN\omega T}\right)}$$

olarak bulunur. Sonuç olarak giriş-çıkış ilişkisi frekans domeninde

$Y\left(e^{j\omega T}\right)=H\left(e^{j\omega T}\right)X\left(e^{j\omega T}\right)$ çarpma işlemine karşılık gelir.

Örnek: Bir sistemin giriş-çıkış ilişkisi $y[n]+0.6y[n-1]=0.6x[n]+x[n-1]$ şeklindedir.

a)Sistemni genlik ve faz tepkesini bulunuz ve ölçekli olarak çiziniz.

b)Sistemin girişine $x[n]=5+Cos\left(\frac{\pi n}{8}\right)+0.5Sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$ işareti uygulandığında çıkış $y[n]$ yi bulunuz.

Çözüm: **a)** Transfer fonksiyonu

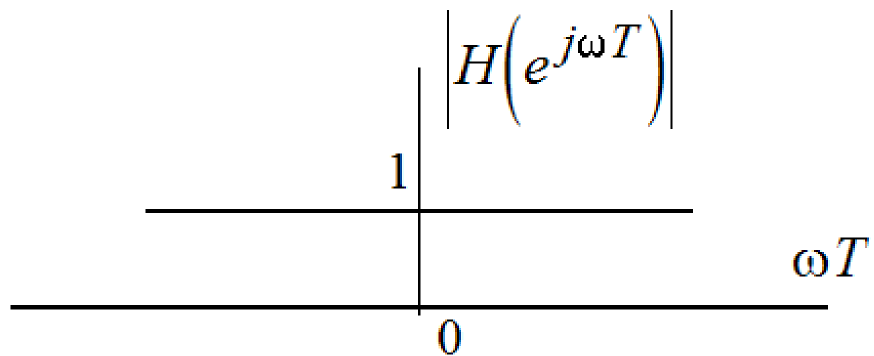
$$H\left(e^{j\omega T}\right)=\frac{0.6+e^{-j\omega T}}{1+0.6e^{-j\omega T}}=\frac{0.6+Cos(\omega T)-jSin(\omega T)}{1+0.6Cos(\omega T)-j0.6Sin(\omega T)}$$

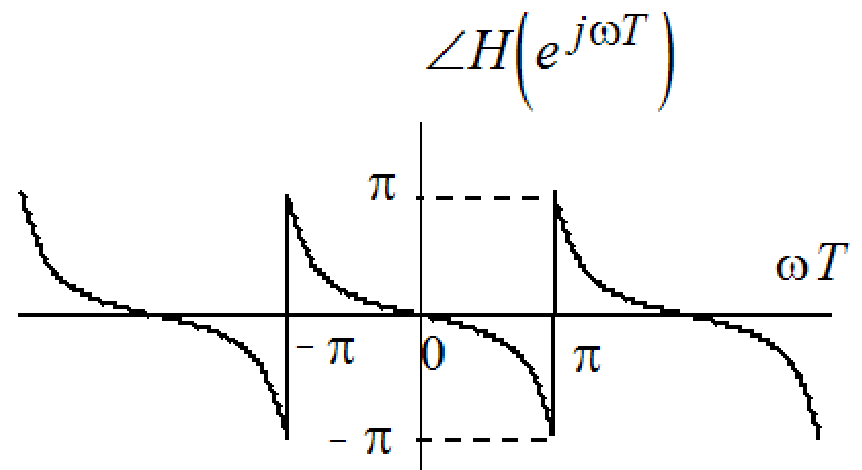
Genlik tepkesi:

$$\left|H\left(e^{j\omega T}\right)\right|=\frac{\sqrt{(0.6+Cos(\omega T))^2+Sin^2(\omega T)}}{\sqrt{(1+0.6Cos(\omega T))^2+0.36Sin^2(\omega T)}}=1$$

Faz tepkesi:

$$\angle H\left(e^{j\omega T}\right)=arctg\left(\frac{-Sin(\omega T)}{0.6+Cos(\omega T)}\right)-arctg\left(\frac{-0.6Sin(\omega T)}{1+0.6Cos(\omega T)}\right)$$


$\left|H\left(e^{j\omega T}\right)\right|$
1
ωT
0


$\angle H\left(e^{j\omega T}\right)$
π
ωT
$-\pi$
0
π
$-\pi$

b) $x[n]=5+Cos\left(\frac{\pi n}{8}\right)+0.5Sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)+0.25Cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$

Birinci terim doğru bileşen olup, $\omega T=0$ dır. Sonuç olarak $\angle H\left(e^{j0}\right)=0^{\circ}$dir.

İkinci terimde $\omega T=\frac{\pi}{8}$ olup $\angle H\left(e^{j\pi/8}\right)=-8.9^{\circ}$

Üçüncü terimde $\omega T=\frac{\pi}{4}$ olup karşılık gelen açı $\angle H\left(e^{j\pi/4}\right)=-18^{\circ}$ dir.

Son terimde $\omega T=\frac{\pi}{2}$ olup karşılık gelen açı $\angle H\left(e^{j\pi/2}\right)=-35.5^{\circ}$ dir.

Bu sonuçlara göre çıkış işareti:

$$y[n]=5+Cos\left(\frac{\pi n}{8}-8.9^{\circ}\right)+0.5Sin\left(\frac{\pi n}{4}-18^{\circ}\right)+0.25Cos\left(\frac{\pi n}{2}-35.5^{\circ}\right)$$

Birim Örnek Tepkesi Modeli

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]$$

$$Y\left(e^{j\omega T}\right) = X\left(e^{j\omega T}\right)H\left(e^{j\omega T}\right)$$

$$\Rightarrow$$

$$H\left(e^{j\omega T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-jn\omega T}$$

Ayrık Sistemlerin z-Domeni Modelleri

İki Yanlı z-Dönüşümü

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] z^{-n}$$

Yakınsama bölgesi:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x[n] z^{-k} \right| < \infty$$

şartını sağlayan z lerin bulunduğu bölgedir.

Örnek:

$$x[n]=\begin{cases}\alpha^{n}, & \text{n} \geq 0 \\ 0, & \text{diğiğeyerlerde}\end{cases}, \quad y[k]=\begin{cases}-\alpha^{n}, & \text{n} \leq -1 \\ 0, & \text{diğiğeyerlerde}\end{cases}$$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n} z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\alpha z^{-1}\right)^{n},$$

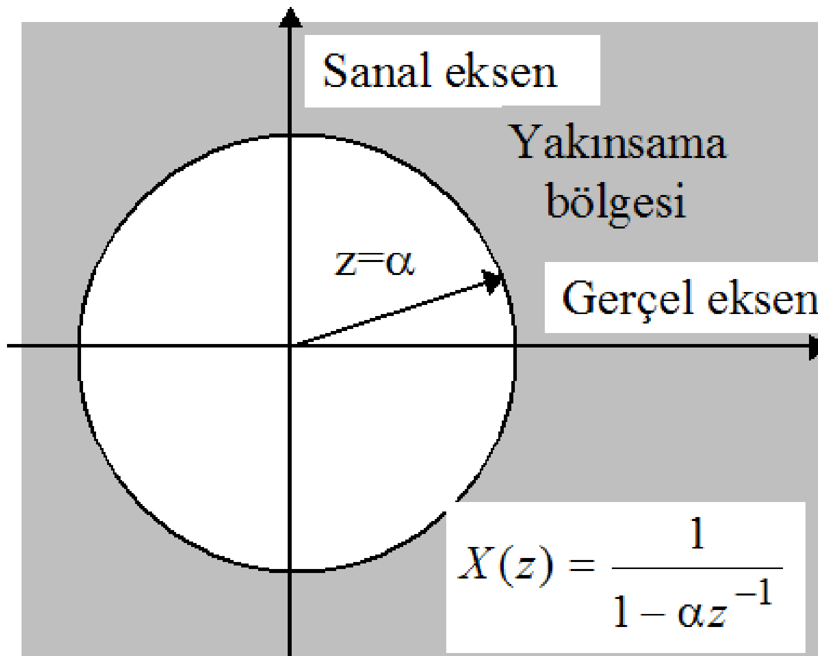
Yukardaki toplam $\left|\alpha z^{-1}\right|<1$ ya da eşdeğer olarak $|z|>|\alpha|$ ise yakınsar. Bu durumda $X(z)=\dfrac{1}{1-\alpha z^{-1}}$ bulunur.

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(-\alpha^{n}\right)z^{-n}$$

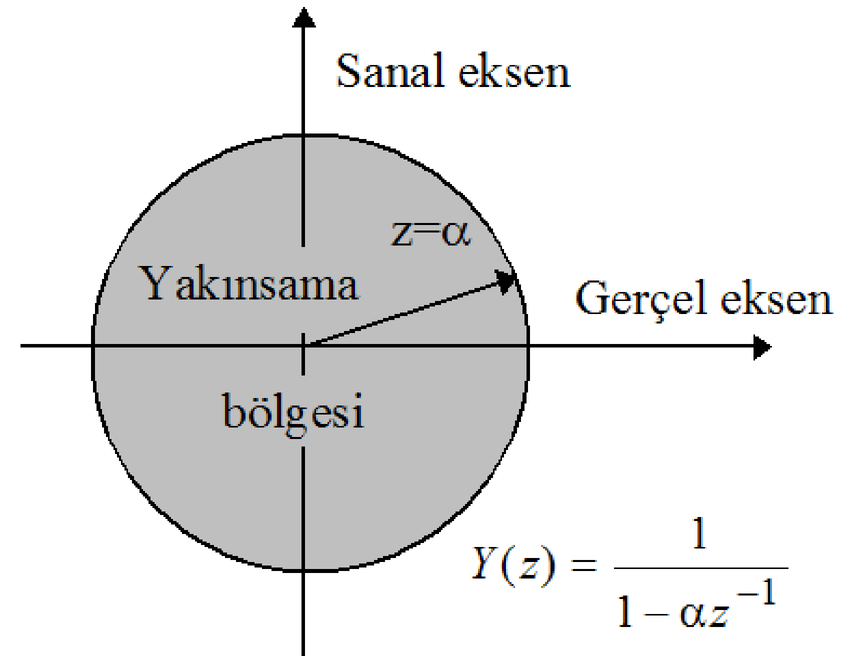
$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\alpha^{-1}z\right)^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha^{-1}z\right)^{n} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha^{-1}z\right)^{-n}$$

Yukardaki ifadedeki toplam $\left|\alpha^{-1}z\right| < 1$, ya da eşdeğer olarak $|z| < |\alpha|$ olması halinde yakınsar. Bu durumda,

$$Y(z) = 1 - \frac{1}{1-\alpha^{-1}z} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$$ elde edilir.



Sanal eksen
Yakınsama
bölgesi
z=α
Gerçel eksen
$X(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$



Sanal eksen
z=α
Yakınsama
Gerçel eksen
bölgesi
$Y(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$

Bazı İşaretlerin İki Yanlı z-Dönüşümleri

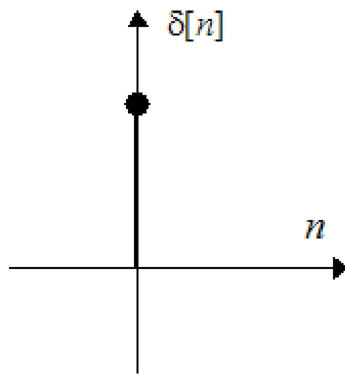
Birim Örnek **($\delta[n]$)** ***İşareti:***

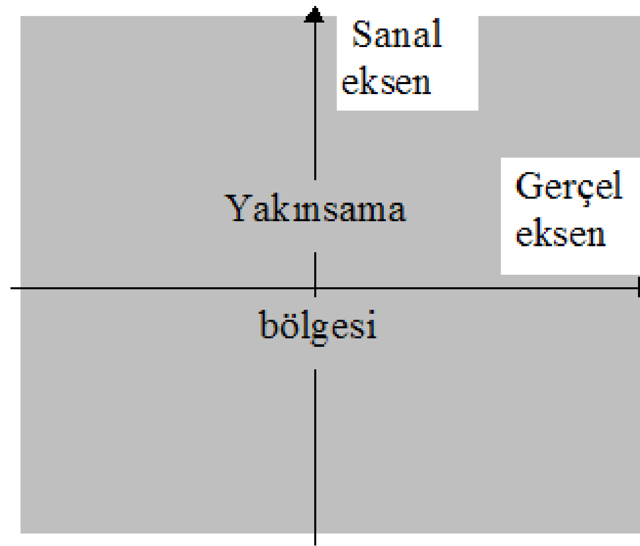
$$Z\{\delta[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] z^{-n} = z^{0} = 1$$

dir. Yakınsama bölgesi ise

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \delta[n] z^{-n} \right| < \infty$$

şartını sağlayan tüm z değerleridir.

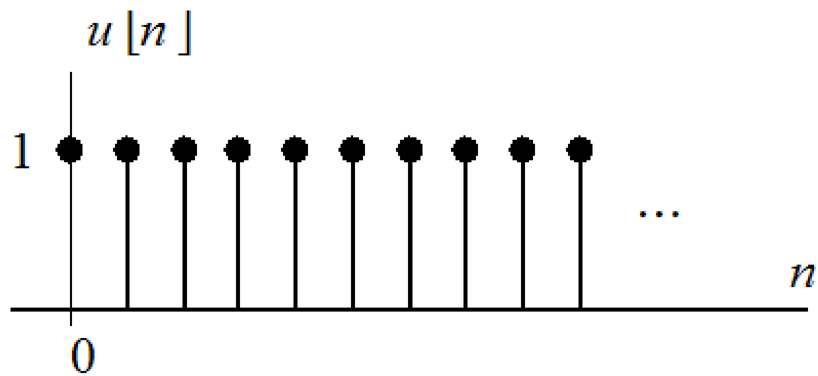

δ[n]
n

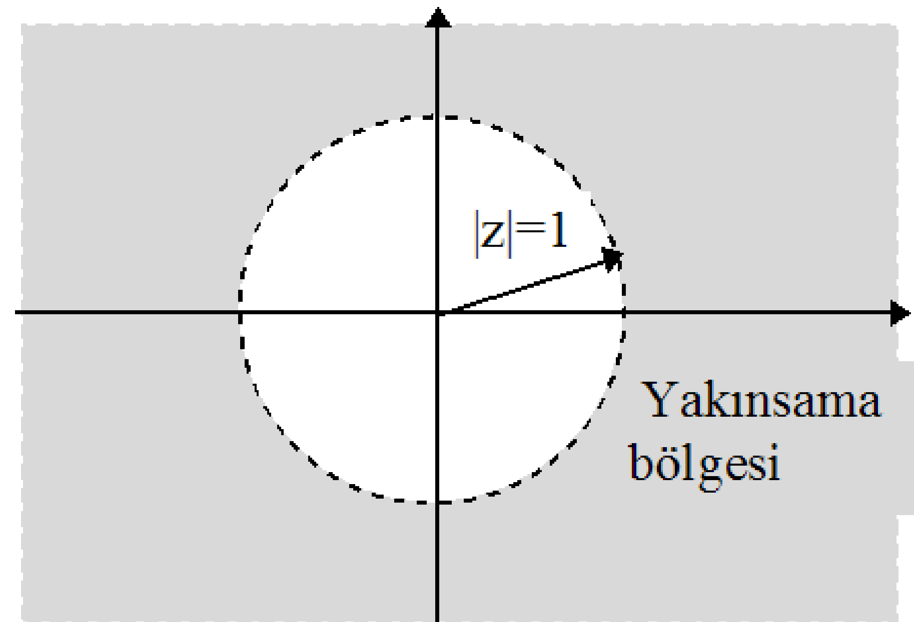

Sanal
eksen
Gerçel
eksen
Yakınsama
bölgesi

Birim Basamak Dizisi

$$U(z) = Z\{u[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{u[n]z^{-n}} = \sum_{n=-0}^{\infty} \left(z^{-1}\right)^{n}$$

$$|\mathrm{z}| > 1 \text{ ise} U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \text{ dir.}$$


u[n]
1
...
n
0


|z|=1
Yakınsama
bölgesi

İki Yanlı Simetrik Ayrık Üstel İşaret

$$Z\left\{e^{\alpha|n|}\right\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\alpha|n|} z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1} e^{-\alpha n} z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha n} z^{-n}$$

Birinci terimin z-dönüşümü ve yakınsama bölgesi:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} e^{-\alpha n} z^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\alpha} z^{1}\right)^{n}=\frac{1}{1-e^{\alpha} z^{1}}-1$$

Yakınsama bölgesi: $\left|e^{\alpha} z^{1}\right|<1$ veya $|z|<e^{-\operatorname{Re}\{\alpha\}}$ dir.

İkinci terimin z-dönüşümü:

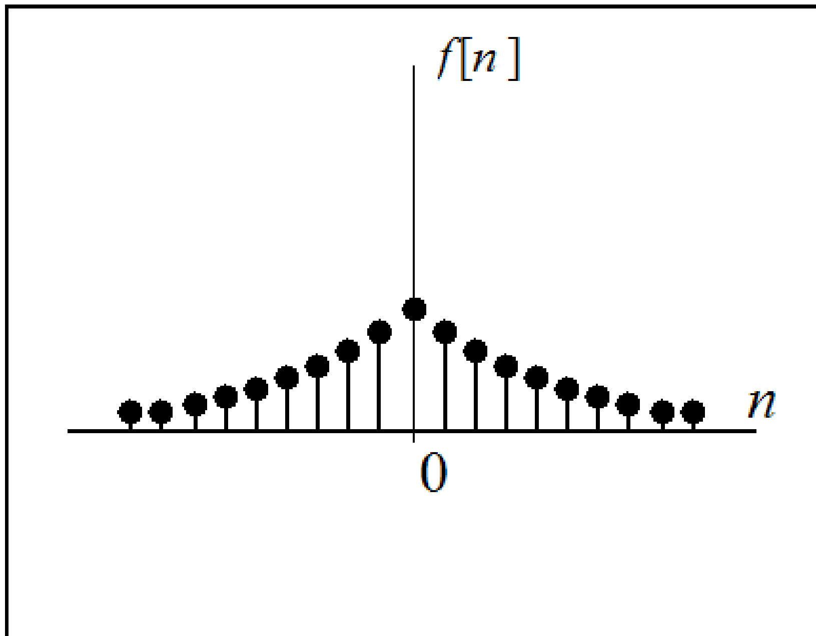
$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha n} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{\alpha} z^{-1}\right)^{n} = \frac{1}{1-e^{\alpha} z^{-1}}$$

Yakınsama bölgesi: $\left|e^{\alpha} z^{-1}\right| < 1$ veya $|z| > e^{\mathrm{Re}\{\alpha\}}$ dir.

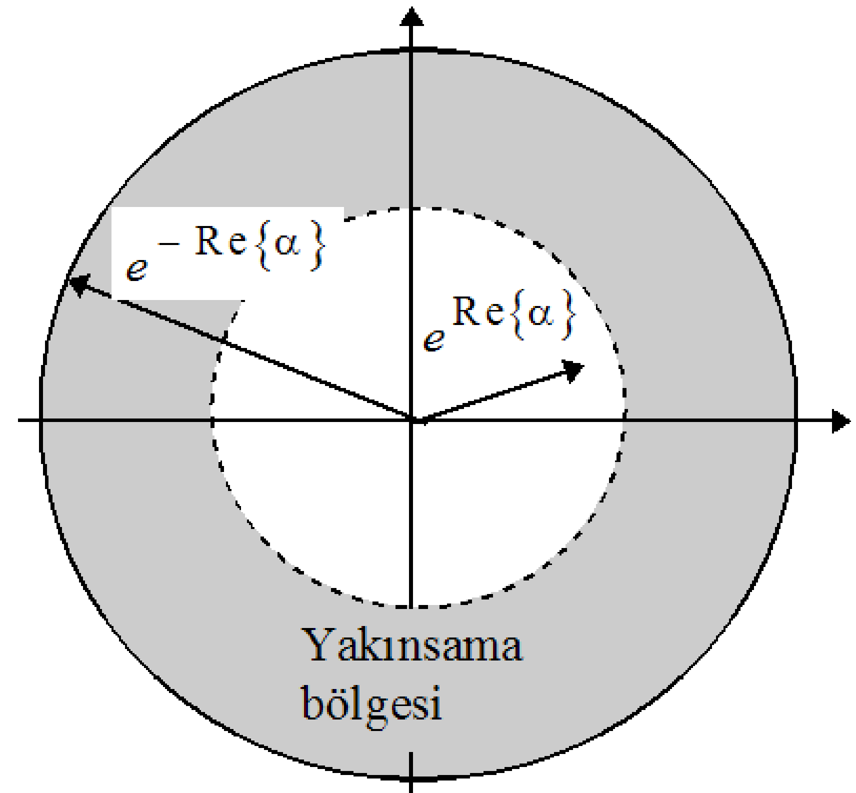
$$F(z) = \frac{1}{1-e^{\alpha} z^{1}} - 1 + \frac{1}{1-e^{\alpha} z^{-1}}$$

Aynı sonuç $e^{\alpha|n|} = e^{-\alpha n} u[-n-1] + e^{\alpha n} u[n]$ olduğu dikkate alınarak da bulunabilir.

Yakınsama bölgesi: $e^{\mathrm{Re}\{\alpha\}} < |z| < e^{-\mathrm{Re}\{\alpha\}}$



f[n]
n
0



$e^{-\mathrm{Re}\{\alpha\}}$
$e^{\mathrm{Re}\{\alpha\}}$
Yakınsama bölgesi

Tek Yanlı z-Dönüşümü

$$F_t(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] z^{-n}$$

Tek yanlı z-dönüşümünün yakınsama bölgesi $|z| > R_-$ şeklindedir. Dolayısıyla tek yanlı z-dönüşümlerinin tersinin alınmasında yakınsama bölgesinin bilinmesine gerek yoktur.

Bazı Fonksiyonların Tek Yanlı z-Dönüşümleri

Birim Örnek **(δ[*n*])** ***İşareti:***

$$Z_t\{\delta[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty}\delta[n]z^{-n} = z^0 = 1$$

dir. Fonksiyon tüm z değerleri için yakınsaktır.

Birim Basamak Dizisi

$$U_t(z) = Z_t\{u[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty}u[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(z^{-1}\right)^n = U_t(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

YB: $|z| > 1$

Tek Yanlı Üstel İşaret

$$Z_t\left\{e^{\beta n}u[n]\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{\beta n}u[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{\beta}z^{-1}\right)^{n}=\frac{1}{1-e^{\beta}z^{-1}}$$

$$\text{YB: } |z|>e^{\operatorname{Re}\{\beta\}}$$

Bazı z-dönüşüm çiftleri

$$a^n u[n] \leftrightarrow \frac{z}{z-a} \quad , \qquad |z| > |a|$$

$$-a^n u[-n-1] \leftrightarrow \frac{z}{z-a} \quad , \quad |z| < |a|$$

$$na^n u[n] \leftrightarrow \frac{az}{(z-a)^2} \quad , \qquad |z| > |a|$$

$$(n+1)a^n u[n] \leftrightarrow \left[\frac{z}{z-a}\right]^2 \quad , \qquad |z| > |a|$$

$$(\cos \omega_0 n)u[n] \leftrightarrow \frac{z^2 - z(\cos \omega_0)}{z^2 - z(2\cos \omega_0) + 1}, \qquad |z| > 1$$

$$(\sin \omega_0 n)u[n] \leftrightarrow \frac{z(\sin \omega_0)}{z^2 - z(2\cos \omega_0) + 1}, \qquad |z| > 1$$

z-dönüşümünün bazı özelllikleri

$$a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \leftrightarrow a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$$

$$f[n \pm m] \overset{z}{\leftrightarrow} z^{\pm m} F(z)$$

$$a^n x[n] \leftrightarrow X\left(\frac{z}{a}\right)$$

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \leftrightarrow X\left(e^{-j\omega_0} z\right)$$

$$x[-n] \leftrightarrow X\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$nx[n] \leftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$$

$$x_1[n]^* x_2[n] \leftrightarrow X_1(z)X_2(z)$$

Örnek:

$(n-5)u[n-4]$ dizisinin iki yanlı z-dönüşümünü kayma özelliğinden yararlanarak bulunuz.

Çözüm:

$(n-5)u[n-4]=(n-4)u[n-4]-u[n-4]$ dir.

$$Z\{(n-5)u[n-4]\}=z^{-4}\frac{z}{(z-1)^2}-z^{-4}\frac{z}{(z-1)}$$

$$=\frac{z-2}{z^3(z-1)^2}$$

Tek yanlı z dönüşümünde zamanda kayma özelliği:

$$f[n-m] \leftrightarrow f[-m] + f[-m+1]z^{-1} + \ldots + f[-1]z^{-m+1} + z^{-m}F_t(z)$$

$$f[n+m] \leftrightarrow -f[0]z^{m} - f[1]z^{m-1} - \ldots - f[m-1]z + z^{m}F_t(z)$$

Örnek: $f[n] = -\frac{1}{9}(-1)^n u[n] - \frac{1}{3} n(-1)^{n-1} u[n] - \frac{10}{9} 2^n u[-n-1]$

ayrık dizisinin

a) iki yanlı z-dönüşümünü bulunuz.

b) Yakınsama bölgesini çiziniz.

Not: $na^{n-1}u[n]$ nın yakınsama bölgesi $|z| > |a|$ dır.

Çözüm:

a) $u[n]$: birim basamak fonksiyonu olduğundan,

$$F(z) = -\frac{1}{9}\frac{z}{z+1} - \frac{1}{3}\frac{z^{-1}}{\left(1+z^{-1}\right)^2} + \frac{10}{9}\frac{z}{z-2}$$

$$= \frac{-z^3 + z^2 + 2z - 3z^2 + 6z + 10z^3 + 20z^2 + 10z}{9(z+1)^2(z-2)} = \frac{z^3 + 2z^2 + 2z}{(z+1)^2(z-2)}$$

olarak elde edilir.

b) Yakınsama bölgesi ise, herbir terimin yakınsama bölgesinin kesiştiği bölgedir. Yakınsama bölgeleri,

$-\frac{1}{9}(-1)^n u[n]$ için $|z| > 1$,

$-\frac{1}{3}n(-1)^{n-1}u[n]$ için $|z| > 1$,

$-\frac{10}{9}2^n u[-n-1]$ için $|z| < 2$ dir. Sonuç olarak dizinin yakınsama bölgesi ortak bölge olan $1 < |z| < 2$ bölgesidir.

Ters z-dönüşümü:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz \quad \text{(Cauchy integrali)}$$

Kısmi Kesirlere Açılım:

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_o + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_M z^{-M}}{a_o + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_N z^{-N}} \;, \quad N > M$$

rasyonel fonksiyonununun pay ve paydası z^N ile çarpılarak z nin negatif kuvvetlerinden kurtarılır. Bu durumda yukardaki ifade,

$$F(z) = \frac{b_o z^N + b_1 z^{N-1} + b_2 z^{N-2} + \ldots + b_M z^{N-M}}{a_o z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + \ldots + a_N}$$

$N > M$ olduğundan,

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{b_o z^{N-1} + b_1 z^{N-2} + b_2 z^{N-3} + \ldots + b_M z^{N-M-1}}{a_o z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + \ldots + a_N}$$

fomksiyonu da daima uygun fonksiyondur. $F(z)$ nin bu formunu elde ettikten sonra kısmi kesirlere açılım işlemi daha basit olarak yapılabilir.

$$\frac{F(z)}{z} = K \frac{(z - z_1)\ldots(z - z_M)}{(z - p_1)\ldots(z - p_N)}$$

Tüm kutuplar katsız ise:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z-p_1} + \ldots + \frac{A_N}{z-p_N} = \frac{A_0}{z} + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{(z-p_k)}$$

$$A_0 = F(z)\Big|_{z=0} \quad \text{ve} \quad A_k = (z-p_k)\frac{F(z)}{z}\Big|_{z=p_k}$$

$$F(z) = A_0 + A_1\frac{z}{z-p_1} + \ldots + A_N\frac{z}{z-p_N} = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k\frac{z}{(z-p_k)}$$

M>N ise

$$F(z) = \sum_{q=0}^{M-N} B_q z^q + \sum_{k=1}^{N} A_k\frac{z}{(z-p_k)}$$

Katlı kutup varsa, örneğin p_i kökü r katlı ise

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{L_1}{z - p_i} + \frac{L_2}{(z - p_i)^2} + \ldots + \frac{L_r}{(z - p_i)^r}$$

olur. Burada

$$L_{r-k} = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} \left[(z - p_i)^r \frac{X(z)}{z} \right] \Bigg|_{z = p_i}$$

dir.

Kısmi Terim $F_i(z)$	Karşılık gelen $f[n]$ $\|z\| > \|p_k\|$ ise	$\|z\| < \|p_k\|$ ise
$\dfrac{z}{z-p}$	$p^n u[n]$	$-p^n u[-n-1]$
$\dfrac{pz}{(z-p)^2}$	$np^n u[n]$	$-np^n u[-n-1]$
$\left[\dfrac{z}{z-p}\right]^2$	$(n+1)p^n u[n]$	$-(n+1)p^n u[-n-1]$

$$\left[\frac{z}{z-p}\right]^m = \frac{1}{\left(1-pz^{-1}\right)^m}$$

$$\frac{(n+1)\ldots(n+m-1)}{(m-1)!}\,p^n u[n]$$

$$-\frac{(n+1)\ldots(n+m-1)}{(m-1)!}\,p^n u[-n-1]$$

$F(z)$ z=0 da r katlı bir kutbu olması halinde $z^r F(z)$ nin ters z-dönüşümü alınır ve bulunan dizi r örnek pozitif yönde kaydırılarak $f[n]$ elde edilir.

Transfer Fonksiyonu:

Transfer Fonksiyonunun Fark Denkleminden Elde Edilmesi:

$$a_o y[n] + a_1 y[n-1] + \ldots + a_N y[n-N] = b_o x[n] + b_1 x[n-1] + \ldots + b_M x[n-M]$$

$$\left(a_o + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}\right) Y(z) = \left(b_o + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}\right) X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_o + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_M z^{-M}}{a_o + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_N z^{-N}}$$

Tek yanlı z-dönüşümü alındığında

$$a_o Y(z) + a_1\left(y[-1] + z^{-1}Y(z)\right) + a_2\left(y[-2] + y[-1]z^{-1} + z^{-2}Y(z)\right) + \ldots$$

$$\ldots + a_N\left(x[-N] + x[-N-1]z^{-1} + \ldots + x[-1]z^{-(N-1)} + z^{-N}Y(z)\right)$$

$$= b_o X(z) + b_1\left(x[-1] + z^{-1}X(z)\right) + b_2\left(x[-2] + x[-1]z^{-1} + z^{-2}X(z)\right) + \ldots$$

$$b_M\left(x[-M] + x[-M-1]z^{-1} + \ldots + x[-1]z^{-(M-1)} + z^{-M}Y(z)\right)$$

elde edilir. Bu eşitlikten $Y(z)$ çekilirse,

$$Y_t(z) = \frac{b_o + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}}{a_o + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}} X_t(z)$$

$$+ \frac{\sum_{i=1}^{N} y[-i] \sum_{k=0}^{N-i} a_{N-k} z^{-(N-k-i)}}{a_o + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}} + \frac{\sum_{j=1}^{M} x[-j] \sum_{l=0}^{M-j} b_{M-l} z^{-(M-l-j)}}{a_o + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}}$$

elde edilir.

Transfer Fonksiyonunun Birim Örnek Tepkesinden Elde Edilmesi:

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] \qquad Y(z) = X(z) * H(z)$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

Nedensel bir sistem nedensel bir işaretle uyarılırsa:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{n} x[m]h[n-m] \quad Y_t(z) = X_t(z)H(z)$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

Frekans Transfer Fonksiyonu:

Frekans Tepkesi, sistem transfer fonksiyonu $H(z)$nin birim daire üzerinde değerlendirilmesiyle elde edilir.

$$H\left(e^{j\omega T}\right) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega T}}$$

Örnek: $y[n]-y[n-1]+0.25y[n-2]=2^{n}u[n]$ fark denklemini z-dönüşümü yardımıyla $y[-1]=2$ ve $y[-2]=1$ başlangıç değerleri için $0 \le n < \infty$ aralığında çözünüz.

Çözüm: Her iki tarafın tek yanlı z-dönüşümünü alınırsa,

$$Y_t(z)-\left[Y_t(z)z^{-1}+2\right]+0.25\left[z^{-2}Y_t(z)+2z^{-1}+1\right]=\frac{z}{z-2}$$

elde edilir Sonuç olarak,

$$\left(1-z^{-1}+0.25z^{-2}\right)Y_t(z)=\frac{z}{z-2}+2-0.5z^{-1}-0.25$$

elde edilir. Gerekli düzenlemelerden sonra

$$Y_t(z) = \frac{z^3 + \left(1.75z^2 - 0.5z\right)(z-2)}{(z-2)\left(z^2 - z + 0.25\right)} = \frac{2.75z^3 - 4z^2 + z}{(z-2)(z-0.5)^2}$$

bulunur. Paydanın derecesi payın derecesine eşit olduğundan, bir bölme işlemi yapılırsa,

$$Y_t(z) = 2.75 + \frac{4.25z^2 - 5.1875z + 1.375}{(z-2)\left(z^2 - z + 0.25\right)}$$

elde edilir. İkinci terim kısmi kesirlere açılım yöntemiyle

$$\frac{4.25z^2 - 5.1875z + 1.375}{(z-2)\left(z^2 - z + 0.25\right)}$$

$$= A_0 + \frac{A_1}{1-2z^{-1}} + \frac{A_2}{1-0.5z^{-1}} + \frac{A_3}{(1-0.5z^{-1})^2}$$

$A_0 = -2.75,$ $A_1 = \frac{16}{9},$ $A_2 = \frac{5}{9},$ $A_3 = \frac{5}{12}$

$$Y_t(z) = 2.75 - 2.75 + \frac{16}{9}\frac{z}{z-2} + \frac{5}{9}\frac{z}{z-0.5} + \frac{5}{12}\frac{z^2}{(z-0.5)^2}$$

Ters z-dönüşümü alınırsa

$$y[n] = \frac{16}{9}2^n u[n] + \frac{5}{9}(0.5)^n u[n] + \frac{5}{12}(n+1)(0.5)^n u[n], \quad n \geq 0$$

bulunur.